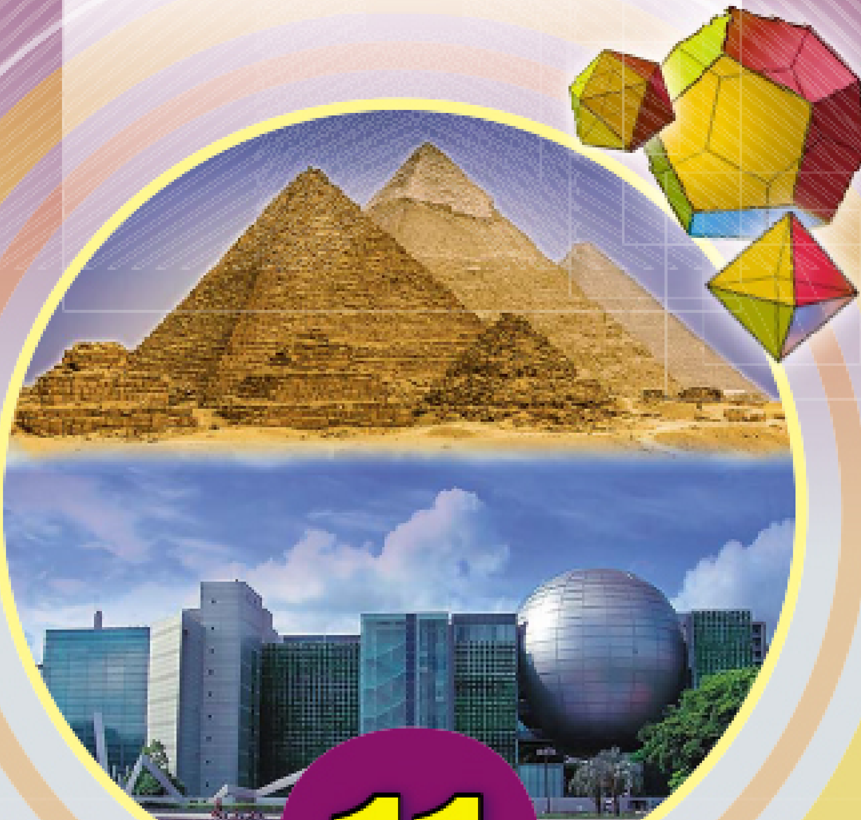
О.С. ІСТЕР

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ



11

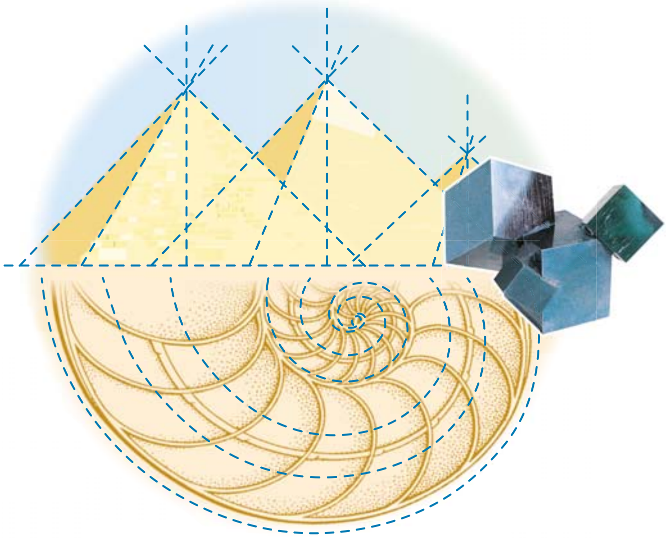
О. С. Істер

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

Підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти



КИЇВ
«ГЕНЕЗА»
2019

УДК 51(075.3)
І-89

Істер О. С.

І-89 Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер. — К. : Генеза, 2019. — 304 с. : іл.
ISBN

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я721

ISBN

Шановні одинадцятикласниці та одинадцятикласники!

Протягом навчання в 11 класі ви продовжите опановувати шкільний курс «Математика», у якому об'єднано матеріал кількох галузей математичної науки.

Нагадаємо, що математика є основним засобом у багатьох галузях науки і техніки. Без математики не можуть існувати медицина, економіка, машинобудування. Певних знань з математики та вміння їх застосовувати вимагає й вивчення багатьох шкільних навчальних предметів. Наприклад, без математики неможливо уявити фізику, хімію, інформатику тощо. Сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах також потребують володіння певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосування до розв'язування практичних задач. Тому одне з головних завдань курсу математики старшої школи – допомогти кожному з вас досягти такої практичної компетентності, яка б забезпечила готовність до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння обраною професією. Підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам у цьому.

Вивчення математики потребуватиме від вас наполегливості, логіки мислення, просторової уяви.

Для зручності матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, рубрик. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв'язування задач і виконання вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної та домашньої робіт тощо. Теоретичний матеріал підручника автор намагався викласти простою, доступною мовою, проілюструвати малюнками та прикладами застосування математики в повсякденному житті.

У підручнику ви побачите такі умовні позначення:

! – означення та математичні твердження, які треба запам'ятати;

Т – теорема; Н – наслідок; ■ – доведення завершено;

– «ключова» задача (задача, висновки якої використовуються для розв'язування інших задач);

? – запитання до теоретичного матеріалу;

1.23 – вправа для виконання у класі;

1.24 – вправа для виконання вдома.

Усі задачі та вправи розподілено відповідно до чотирьох рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

- з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;
- з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;
- з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;
- з позначки 4 починаються вправи високого рівня.

Рубрика **«Розв'яжіть задачі та виконайте вправи»** містить значну кількість завдань для класної та домашньої робіт, усних вправ, практичних завдань, які відповідають темі параграфа та допоможуть добре її опрацювати. У рубриці **«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»** пропонується виконати вправи, необхідні для вивчення наступної теми. У рубриці **«Життєва математика»** зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, тобто всім тим, без чого неможливо уявити людину в сучасному світі. Наприкінці кожного параграфа, в рубриці **«Перевірте свою компетентність»**, ви знайдете тестові завдання, завдяки яким зможете повторити курс математики, перевірити свою предметну компетентність, рівень своєї готовності до складання зовнішнього незалежного оцінювання.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, якщо виконаєте завдання **«Домашньої самостійної роботи»** та **«Завдання для перевірки знань»**.

Також підручник містить рубрику **«А ще раніше...»**, у якій багато цікавих фактів з історії становлення та розвитку математичної науки, виникнення основних її понять, життєвого шляху українських учених, які долучилися до творення шкільного курсу математики.

Бажаємо вам успіхів у навчанні!

Шановні вчительки та вчителі!

Програма з математики рівня стандарту складається з двох навчальних курсів: алгебра і початки аналізу та геометрія. Тому пропонований підручник, відповідно до програми, також містить дві частини.

Сподіваємося, що підручник суттєво допоможе вам в організації процесу навчання математики. Автор намагався створити його таким, щоб він у повній мірі реалізував мету державної програми з математики, формував в учнів науковий світогляд, усвідомлення, що математичні знання є невід'ємною складовою загальної культури людини і необхідною умовою повноцінного життя в сучасному суспільстві, допоміг оволодіти системою математичних знань, навичками та вміннями, потрібними в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності, забезпечив розвиток логічного мислення, інтуїції, просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, формував життєві й предметні компетентності, загальнолюдські цінності особистості, виховував національну самосвідомість.

Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, рубрики), поділу навчального матеріалу на теоретичну та практичну складові, підручник містить рубрику **«Життєва математика»**, що сприятиме реалізації наскрізних ліній програми з математики та допоможе формувати в учнів практичну компетентність. У підручник включено велику кількість задач і вправ, завдань практичного змісту. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності забезпечить особистісно орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятиме формуванню позитивної мотивації учнів до навчання.

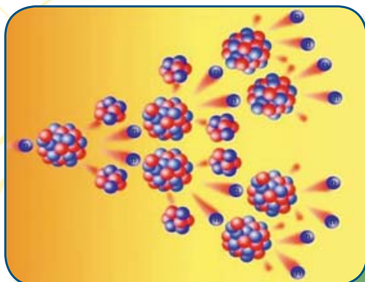
Щасти вам у вашій нелегкій праці!

ЧАСТИНА I

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

РОЗДІЛ 1

ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ***дізнаєтеся*** про степінь з довільним показником; поняття логарифма числа;
- ***ознайомитеся*** з показниковою та логарифмічною функціями;
- ***навчитеся*** будувати графіки показникових і логарифмічних функцій; застосовувати їх властивості; розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння й нерівності.

§ 1. СТЕПІНЬ З ДОВІЛЬНИМ ДІЙСНИМ ПОКАЗНИКОМ. ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

Раніше ви розглядали різні класи степеневих функцій і степені: з натуральним показником, цілим показником, раціональним показником. Нагадаємо, що

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}$, якщо $n \geqslant 2$ – натуральне число;

$a^1 = a$; $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$; $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$, де p – ціле число, $a \neq 0$;

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, де $a > 0$, n – натуральне число, m – ціле число.

А чи можна розглядати вираз a^l, де l – ірраціональне число?

1. Степінь з довільним дійсним показником

Розглянемо вираз a^l, де $a > 0$, l – ірраціональне число. Для цього числа l вибираємо послідовність раціональних чисел $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$, що задає наближення числа l з будь-якою точністю. Будуємо послідовність степенів з раціональним показником $a^{l_1}, a^{l_2}, \ldots, a^{l_n}, \ldots$. Ця послідовність і задає наближення числа a^l з будь-якою точністю.

Приклад 1. Розглянемо степінь $3^{\sqrt{2}}$. Ірраціональне число $\sqrt{2}$ можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного дробу: $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$.

Оскільки $1 < \sqrt{2} < 2$, то $3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$, тобто $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$.

Звичайно, така оцінка для числа $3^{\sqrt{2}}$ є неточною, тому розглянемо наступні десяткові наближення числа $\sqrt{2}$ та використаємо калькулятор для обчислення виразів вигляду 3^{α}, де α – раціональне число:

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$; $\quad 3^{1{,}4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}5}$;

$4{,}6555367 < 3^{\sqrt{2}} < 5{,}1961524$;

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$; $\quad 3^{1{,}41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}42}$;

$4{,}7069650 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}7589613$;

$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$; $\quad 3^{1{,}414} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}415}$;

$4{,}7276950 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}7328918$;

$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$; $\quad 3^{1{,}4142} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}4143}$;

$4{,}7287339 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}7292534$.

Бачимо, що поступові значення з недостачею і надлишком наближаються до одного і того самого числа. Значення $3^{\sqrt{2}}$ обчислене на калькуляторі: $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}7288043$.

Як і для раціональних показників, вважають, що: $1^l = 1$ для будь-якого l; $0^l = 0$ для будь-якого $l > 0$.

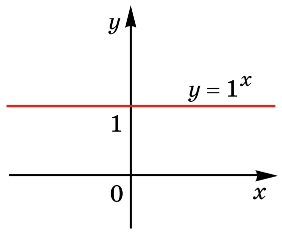
Перед вивченням наступних пунктів цього параграфа радимо повторити основні відомості про функцію, з якими ви ознайомилися в попередніх класах: парність і непарність функції, нулі функції, точки перетину з осями координат, проміжки зростання та проміжки спадання функції, точки екстремумів та екстремуми функції.

2. Показникова функція та її графік

Функцію, яку задано формулою $y = a^x$ (де $a > 0$, $a \neq 1$), називають *показниковою функцією*.

Приклади показникових функцій: $y = 7^x$, $y = \left(\dfrac{1}{8}\right)^x$, $y = \pi^x$, $y = (\sqrt{3})^x$ тощо. Зауважимо, що показникові функції відіграють значну роль у житті людини. Наприклад, вони є математичними моделями таких процесів: зміна популяції протягом тривалого часу, зміна радіоактивної речовини з плином часу тощо.

Функція виду $y = a^x$ існує і при $a = 1$. Тоді $y = 1^x$, тобто $y = 1$ при всіх дійсних значеннях x. Графіком функції $y = 1^x$ є пряма (мал. 1.1). Зауважимо, що у випадку $a = 1$ функція $y = a^x$ не називається показниковою.



Мал. 1.1

Перейдемо до розгляду показникової функції $y = a^x$. Оскільки при $a > 0$ вираз a^x має зміст при будь-якому x, то

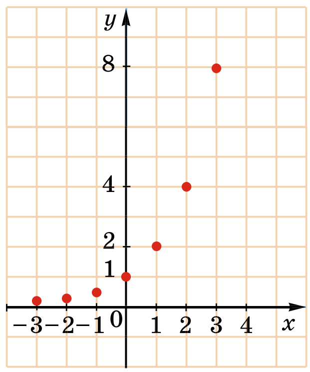
***областю визначення* функції $y = a^x$ є множина всіх дійсних чисел.**

Розглянемо показникові функції та побудуємо їх графіки за точками.

Приклад 2. Розглянемо функцію $y = 2^x$. Складемо таблицю значень функції для кількох цілих значень аргументу.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

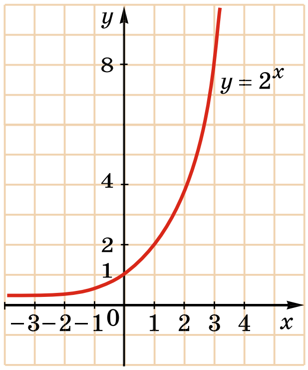
Позначимо на координатній площині точки, координати яких подано в таблиці (мал. 1.2). Якби на цій пло-



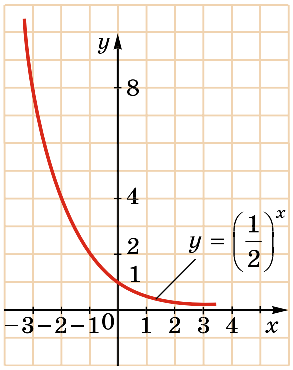
Мал. 1.2

щині позначили більшу кількість точок, координати яких задовольняють формулу $y = 2^x$, а потім сполучили їх плавною лінією, то отримали б графік функції $y = 2^x$ (мал. 1.3).

Зауважимо, що вираз a^x, де $a > 0$, є додатним для будь-якого значення x, тому графік функції $y = a^x$ (і зокрема $y = 2^x$) не перетинає вісь абсцис. Але, якщо $x \to -\infty$, то значення виразу $2^x \to 0$. Тому графік функції $y = 2^x$ при $x \to -\infty$ наближається до осі абсцис, тобто вісь x є асимптотою цього графіка.



Мал. 1.3



Мал. 1.4

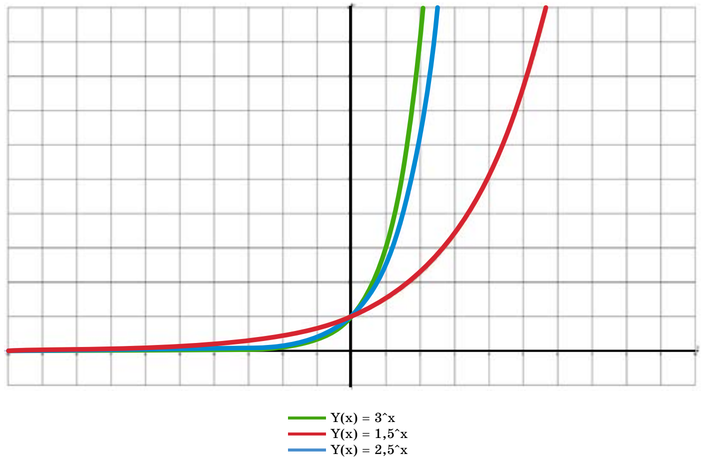
Приклад 3. Розглянемо функцію $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Складемо таблицю значень.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

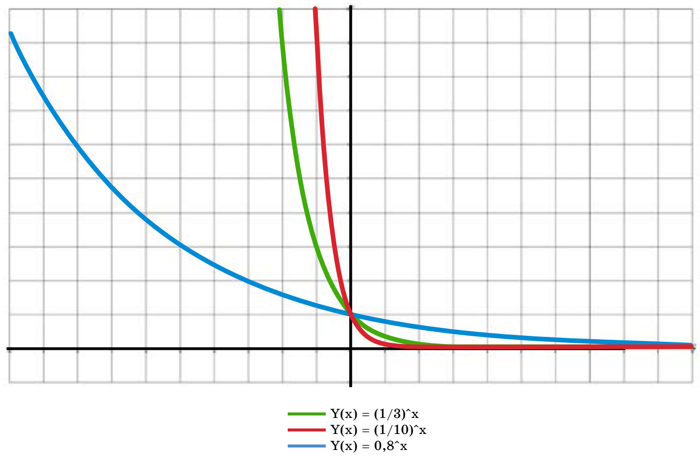
Міркуючи аналогічно до прикладу 2, матимемо графік функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (мал. 1.4).

3. Властивості показникової функції

На малюнку 1.5 зображено графіки функцій $y = 3^x$, $y = 2{,}5^x$, $y = 1{,}5^x$, які побудовано за допомогою комп'ютерної програми. Можна зробити висновок, що при $a > 1$ графік функції $y = a^x$ схематично виглядає так само, як графік функції $y = 2^x$. На малюнку 1.6 подано графіки функцій $y = 0{,}8^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$, де $0 < a < 1$, і вони виглядають так само, як графік функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Мал. 1.5



Мал. 1.6

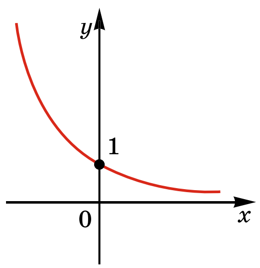
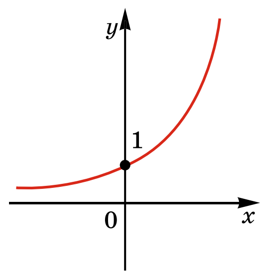
Систематизуємо властивості функції $y = a^x$ при $0 < a < 1$ та при $a > 1$ у вигляді таблиці (див. с. 10).

Властивості степенів з раціональними показниками, з якими ви ознайомилися в попередніх класах, тепер можна поширити на дійсні показники.

Якщо $a > 0$, $b > 0$, x і y — дійсні числа, то:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad (a^x)^y = a^{xy};$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

№	Властивість	$0 < a < 1$	$a > 1$
1	Область визначення	$x \in R$	$x \in R$
2	Множина значень	$(0;\ +\infty)$	$(0;\ +\infty)$
3	Парність, непарність	Ні парна, ні непарна	Ні парна, ні непарна
4	Періодичність	Неперіодична	Неперіодична
5	Нулі функції	Немає	Немає
6	Проміжки знакосталості	$y > 0$ при $x \in R$	$y > 0$ при $x \in R$
7	Проміжки монотонності	Спадає при $x \in R$	Зростає при $x \in R$
8	Екстремуми	Немає	Немає
9	Асимптота	$y = 0$	$y = 0$
10	Графік функції проходить через точку (0; 1)		

Розглянемо приклади використання властивостей показникової функції.

Задача 1. Порівняти значення виразів:

1) $\pi^{2,7}$ і $\pi^{2,8}$; 2) $(\sqrt{2}-1)^{-5}$ і $(\sqrt{2}-1)^{-4}$.

Розв'язання. 1) Функція $y = \pi^x$ зростає на R ($\pi \approx 3,14 > 1$), тому більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Оскільки $2,7 < 2,8$, то $\pi^{2,7} < \pi^{2,8}$.

2) Функція $y = (\sqrt{2}-1)^x$ спадає на R ($\sqrt{2}-1 \approx 0,4 < 1$), тому більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Оскільки $-5 < -4$, то $(\sqrt{2}-1)^{-5} > (\sqrt{2}-1)^{-4}$.

Відповідь. 1) $\pi^{2,7} < \pi^{2,8}$; 2) $(\sqrt{2}-1)^{-5} > (\sqrt{2}-1)^{-4}$.

Задача 2. Порівняти з одиницею основу степеня a ($a > 0$), якщо: 1) $a^{\sqrt{3}} < a^{1,8}$; 2) $a^{-2} > a$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\sqrt{3} \approx 1,73$, то $\sqrt{3} < 1,8$. За умовою $a^{\sqrt{3}} < a^{1,8}$, більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тому функція $y = a^x$ зростає, а отже, $a > 1$.

2) $-2 < 1$, а за умовою $a^{-2} > a$. Тому більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, отже, функція $y = a^x$ спадає, звідки $0 < a < 1$.

Відповідь. 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$.

Вирази, що містять степені з дійсними показниками, можна спрощувати, використовуючи формули аналогічно спрощенню виразів з раціональними показниками.

Задача 3. Спростити вираз:

1) $a^{1+\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}}$; 2) $b^{3-\sqrt{7}} : b^{1+\sqrt{7}}$; 3) $(c^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}}$.

Розв'язання. 1) $a^{1+\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}} = a^{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = a^2$;

2) $b^{3-\sqrt{7}} : b^{1+\sqrt{7}} = b^{3-\sqrt{7}-(1+\sqrt{7})} = b^{3-\sqrt{7}-1-\sqrt{7}} = b^{2-2\sqrt{7}}$;

3) $(c^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}} = c^{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}} = c^{\sqrt{100}} = c^{10}$.

Відповідь. 1) a^2; 2) $b^{2-2\sqrt{7}}$; 3) c^{10}.

4. Застосування показникової функції до розв'язування прикладних задач

Розглянемо приклади застосування показникової функції до розв'язування прикладних задач.

Показникова функція часто використовується для описання різних фізичних процесів, наприклад, радіоактивний розпад описується формулою:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_0}},$$

де m_0 – маса радіоактивної речовини в початковий момент часу $t = 0$, $m(t)$ – її маса в момент часу t, T_0 – період напіврозпаду (інтервал часу, за який початкова кількість речовини зменшиться вдвічі).

Задача 4. Період напіврозпаду деякого ізотопу плутонія дорівнює 140 діб. Скільки плутонія залишиться через 4 роки, якщо його початкова маса дорівнює 10 г?

Розв'язання. Маємо $m_0 = 10$ г, $t = 3 \cdot 365 + 366 = 1461$ (діб).

Тоді $m(1461) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1461}{140}} \approx 0,0072$ г.

Відповідь. 0,0072 г.

За допомогою показникової функції також, наприклад, виражається тиск повітря залежно від підйому.

Задача 8. Альпініст, який піднявся на висоту $h_1 = 1000$ м, визначив, що тиск повітря $p_1 = 680$ мм рт. ст. Яким буде тиск повітря на висоті $h_2 = 2100$ м за тієї самої температури?

Розв'язання. Відомо, що тиск p_2 (при незмінній температурі) обчислюють за барометричною формулою:

$$p_2 \approx p_1 \cdot (0{,}8886)^{h_2 - h_1},$$

де h_1 і h_2 – висоти в кілометрах.

Отже, $p_2 \approx 680 \cdot (0{,}8886)^{2{,}1-1} \approx 597{,}2$ мм рт. ст.

Відповідь. 597,2 мм рт. ст.

А ще раніше...

До початку XVII ст. в математиці уникали застосовувати дробові та від'ємні показники степеня. Тільки в кінці XVII ст. у зв'язку з ускладненням математичних завдань з'явилася нагальна потреба розширити область визначення показника степеня на всі дійсні числа. Узагальнення поняття степеня a^n, де n – будь-яке дійсне число, дало змогу розглядати показникову функцію $y = a^x$ на множині дійсних чисел і степеневу функцію $y = x^n$ на множині додатних чисел, а при цілих n степенева функція визначена і для $x < 0$.

Першим питання узагальнення поняття степеня розглянув Л. Ейлер у своїй праці «Введення в аналіз», де у двох розділах описав «показові та логарифмічні кількості». Під «показовою кількістю» Ейлер розумів вирази вигляду a^z і y^z, де a – число, y та z – змінні.

- Поясніть, як задається степінь a^l, де $a > 0$, l – ірраціональне число.
- Яку функцію називають показниковою?
- Укажіть властивості показникової функції $y = a^x$ при $0 < a < 1$ і при $a > 1$.
- Запишіть властивості степеня з дійсним показником.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **1.1.** (*Усно.*) Які з наведених функцій є показниковими:
1) $y = 3^x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = 1^x$;
4) $y = (-2)^x$; 5) $y = (\sqrt{2020})^x$; 6) $y = x$;
7) $y = (x-2)^3$; 8) $y = (\pi - 1)^x$?

Які з наведених функцій є зростаючими, а які – спадними (**1.2–1.3**):

1.2. 1) $y = 8^x$; 2) $y = 0{,}4^x$; 3) $y = 0{,}01^x$; 4) $y = (2\pi)^x$?

1.3. 1) $y = 0{,}15^x$; 2) $y = 7^x$; 3) $y = \left(1\frac{8}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{100}\right)^x$?

1.4. Порівняйте x і y, якщо: 1) $0{,}2^x > 0{,}2^y$; 2) $1{,}3^x > 1{,}3^y$.

1.5. Порівняйте m і n, якщо: 1) $5^m < 5^n$; 2) $0{,}7^m < 0{,}7^n$.

2 Порівняйте числа (**1.6–1.7**):

1.6. 1) $4^{0{,}2}$ і $4^{0{,}5}$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$ і $\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}$.

1.7. 1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{0{,}8}$ і $\left(\frac{4}{9}\right)^{0{,}9}$; 2) 8^{-2} і $8^{-1{,}9}$.

Побудуйте схематично графік функції та запишіть її властивості (**1.8–1.9**):

1.8. 1) $y = 1{,}4^x$; 2) $y = 0{,}7^x$.

1.9. 1) $y = 0{,}6^x$; 2) $y = 2{,}3^x$.

1.10. Порівняйте числа a і b, якщо:

1) $\left(\sin\frac{\pi}{9}\right)^a > \left(\sin\frac{\pi}{9}\right)^b$; 2) $\left(\frac{1}{\cos 12°}\right)^a > \left(\frac{1}{\cos 12°}\right)^b$.

1.11. Порівняйте числа p і q, якщо:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^p < \left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^q$; 2) $\left(\frac{1}{\sin 15°}\right)^p < \left(\frac{1}{\sin 15°}\right)^q$.

Порівняйте a з одиницею ($a > 0$) (**1.12–1.13**):

1.12. 1) $a^{12} > a^{10}$; 2) $a^{-7} < a^{-8}$.

1.13. 1) $a^{-8} < a^{-3}$; 2) $a^{15} > a^{16}$.

Знайдіть множину значень функції (**1.14–1.15**):

1.14. 1) $y = -5^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 3$; 4) $y = 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^x$.

1.15. 1) $y = -\left(\frac{1}{7}\right)^x$; 2) $y = 2^x - 5$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$; 4) $y = 2 - 4^x$.

1.16. Період напіврозпаду деякого ізотопу плутонія дорівнює 140 діб. Визначте масу плутонія, який залишиться через 8 років, якщо його початкова маса дорівнює 6 г.

1.17. Період напіврозпаду деякого ізотопу торія дорівнює 24 доби. Визначте масу торія, який залишиться через 4 роки, якщо його початкова маса дорівнює 20 г.

1.18. Альпіністка, яка піднялася на висоту $h_1 = 800$ м, визначила, що тиск повітря $p_1 = 700$ мм рт. ст. Яким буде тиск повітря на висоті $h_2 = 1200$ м за тієї самої температури?

1.19. Група альпіністів та альпіністок розбили базовий табір на висоті $h_1 = 700$ м і визначили, що тиск повітря на цій висоті становить $p_1 = 703$ мм рт. ст. Яким буде тиск повітря на висоті $h_2 = 1600$ м, на яку піднялася група для встановлення прапора України, якщо температура за час підйому не змінилася?

Обчисліть **(1.20–1.21)**:

1.20. 1) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; 2) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $5^{1-2\sqrt{3}} \cdot 5^{-2\sqrt{3}+2}$; 4) $7^{2-\sqrt{3}} : 7^{3-\sqrt{3}}$.

1.21. 1) $\left(2^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}$; 2) $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$;

3) $9^{1+7\sqrt{2}} \cdot 9^{-2-7\sqrt{2}}$; 4) $4^{2+\sqrt{5}} : 4^{\sqrt{5}}$.

При якому значенні a ($a > 0$, $a \neq 1$) графік функції $y = a^x$ проходить через задану точку **(1.22–1.23)**:

1.22. 1) $A(1;\ 7)$; 2) $B\left(1;\ \frac{1}{3}\right)$; 3) $C(2;\ 9)$; 4) $D\left(2;\ \frac{4}{25}\right)$?

1.23. 1) $M(1;\ 5)$; 2) $N\left(-1;\ \frac{1}{7}\right)$; 3) $P(2;\ 16)$; 4) $Q\left(2;\ \frac{9}{100}\right)$?

1.24. Точка $M(\sin 30°;\ y)$ належить графіку функції $y = 4^x$. Знайдіть y.

1.25. Точка $N(\operatorname{tg} 45°;\ y)$ належить графіку функції $y = 1{,}7^x$. Знайдіть y.

3 Зростаючою чи спадною є функція **(1.26–1.27)**:

1.26. 1) $y = 16^{-\frac{x}{2}}$; 2) $y = \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^{-x}$?

1.27. 1) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2x}$; 2) $y = \left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-x}$?

Обчисліть **(1.28–1.29)**:

1.28. 1) $2^{1-2\sqrt{7}} \cdot 4^{\sqrt{7}+1}$; 2) $3^{(\sqrt{5}+1)^2} : 3^{2\sqrt{5}+4}$.

1.29. 1) $9^{\sqrt{5}-1} \cdot 3^{3-2\sqrt{5}}$; 2) $4^{(1-\sqrt{7})^2} : 4^{6-2\sqrt{7}}$.

Порівняйте числа **(1.30–1.31)**:

1.30. 1) $\pi^{\frac{1}{9}}$ і 1; 2) 1 і $0{,}3^{-2}$; 3) 1 і $2{,}4^{-5}$; 4) $0{,}7^{0,5}$ і 1.

1.31. 1) 1 і $4^{\frac{1}{8}}$; 2) $0{,}2^{1,7}$ і 1; 3) $2{,}5^{-2}$ і 1; 4) 1 і $0{,}3^{-1,8}$.

Побудуйте графік функції **(1.32–1.33)**:

1.32. 1) $y = 2^x + 1$; 2) $y = 2^{x+1}$; 3) $y = -2^x$; 4) $y = 3 - 2^x$.

1.33. 1) $y = 3^x - 2$; 2) $y = 3^{x-2}$; 3) $y = -3^x$; 4) $y = 5 - 3^x$.

1.34. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = 3^{|x|}$; 2) $y = 4^{-|x|}$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 4) $y = \left(\frac{7}{8}\right)^{-|x|}$.

1.35. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, якщо $x \in [-2;\ 3]$.

1.36. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, якщо $x \in [-1;\ 4]$.

4 Знайдіть найменше і найбільше значення функції на R **(1.37–1.38)**:

1.37. 1) $y = 5^{\sin x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x}$;

3) $y = 1 + 2^{|\sin x|}$; 4) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{-|\cos x|} - 1$.

1.38. 1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}$; 2) $y = 5^{|\cos x|}$.

Порівняйте числа **(1.39–1.40)**:

1.39. 1) $\left(\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}$ і $5^{2,5}$; 2) $(2-\sqrt{3})^{-3}$ і $(2+\sqrt{3})^{3,2}$.

1.40. 1) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ і $2^{1,48}$; 2) $(\sqrt{2}-1)^{4,2}$ і $(\sqrt{2}+1)^{-4,2}$.

1.41. Побудуйте схематично графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$.

1.42. Побудуйте схематично графік функції $y = 2^{2-x}$.

Розв'яжіть рівняння графічно **(1.43–1.44)**:

1.43. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -\frac{2}{x}$; 2) $2^{-x} = x + 6$.

1.44. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 4 - x$; 2) $2^x = \frac{8}{x}$.

Життєва математика

1.45. Студент Олексій отримав за виконаний переклад свій перший гонорар у розмірі 500 грн. Він вирішив на всі отримані гроші купити букет троянд для своєї вчительки з англійської мови Марини Петрівни. Яку найбільшу кількість троянд зможе купити студент, якщо утриманий з нього податок на доходи становить 18 % гонорару, військовий збір – 1,5 %, троянди коштують 25 грн за штуку і букет повинен складатися з непарного числа квітів?

1.46. За одну годину роботи автомобільний двигун спалює 200 л кисню. Добова норма, необхідна для дихання однієї людини, становить 80 л кисню. Скільки добових норм кисню спалюють щоденно 400 автомобілів жителів деякого населеного пункту під час поїздки на роботу, якщо шлях займає 30 хв?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

Розв'яжіть рівняння (**1.47–1.48**):

1.47. 1) $-2x = 6$; 2) $4x = -3$; 3) $(x-2)(x+3) = 0$; 4) $x^2 - 3x - 4 = 0$; 5) $x^2 + x + 7 = 0$; 6) $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

1.48. 1) $(x+2)^2 = 2x+3$; 2) $3(x+1)^2 = 2x+2$; 3) $\frac{x-2}{x} = \frac{3}{x+2}$; 4) $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+1} = 1$.

1.49. Подайте числа 8, $\frac{1}{16}$, 64, $\frac{1}{128}$, 2, 128, 1 у вигляді степеня з основою 2.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 1

1. Скільки чотирицифрових чисел, що діляться на 5, можна утворити із цифр 1, 3, 5, 7 (цифри в кожному числі не повинні повторюватися)?

А	Б	В	Г	Д
6	12	18	20	24

2. У зв'язку з тим, що родина більшу частину липня провела у відпустці, за цей місяць холодної води було спожито на 80 % менше, ніж в червні. У скільки разів менше спожила родина холодної води у липні, ніж у червні?

А	Б	В	Г	Д
у 2 рази	у 4 рази	у 5 разів	у 8 разів	неможливо визначити

3. Дано 10 чисел. Серед них числа 5 і 6 трапляються по 3 рази, а число 7 – 4 рази. Знайдіть середнє арифметичне цих 10 чисел.

А	Б	В	Г	Д
5,9	6	6,1	6,2	6,3

4. Скільки цілих розв'язків має нерівність $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 < 0$?

А	Б	В	Г	Д
безліч	6	5	4	3

5. Знайдіть похідну функції $y = x^5 - 2\cos x$.

А	$y' = 5x^4 - 2\sin x$	**Г**	$y' = 5x^4 - 2\cos x$
Б	$y' = 5x^4 + \sin x$	**Д**	$y' = 5x^4 + 2\sin x$
В	$y' = x^4 + 2\sin x$		

6. Скоротіть дріб $\frac{\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$.

А	$\frac{1}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$	**Г**	$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$
Б	$-\frac{2}{\sin 2\alpha}$	**Д**	$\cos 2\alpha - \sin 2\alpha$
В	$\frac{1}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$		

7. Установіть відповідність між властивістю чисел (1–4) і парою чисел (А–Д), що має цю властивість.

Властивість чисел		*Пара чисел*	
1	Менше число є дільником більшого	**А**	12 і 25
2	Найбільший спільний дільник чисел дорівнює 5	**Б**	14 і 21
3	Найменше спільне кратне чисел дорівнює 40	**В**	7 і 21
4	Числа взаємно прості	**Г**	10 і 15
		Д	20 і 8

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Відомо, що $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}2$. Чому дорівнює $\sin 2\alpha$?

9. При якому значенні параметра a система $\begin{cases} x + ay = 1 - a, \\ ax + 4y = -6 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

§ 2. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Рівняння називають *показниковим*, якщо воно містить змінну лише в показниках степенів.

Приклади показникових рівнянь:

$$2^x = 8,\ 3^x + 9^x = 2,\ \frac{1}{2^x + 1} + \frac{1}{2^x - 2} = 3 \text{ тощо.}$$

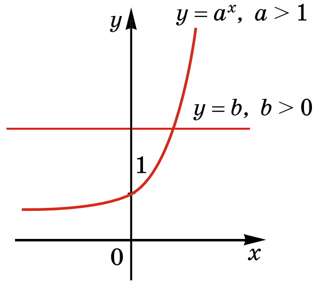
Розглянемо деякі види показникових рівнянь і методи їх розв'язування.

1. Найпростіші показникові рівняння

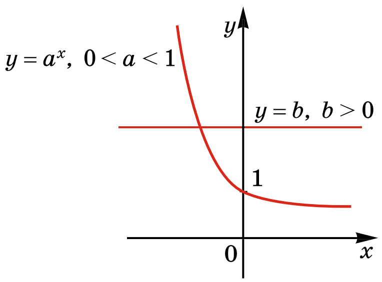
Розглянемо найпростіше показникове рівняння виду

$$a^x = b\ (a > 0,\ a \neq 1).$$

Оскільки $a^x > 0$ для всіх значень x, то у випадку $b \leqslant 0$ рівняння розв'язків не має. Якщо $b > 0$, то визначимо кількість коренів рівняння $a^x = b$ графічним способом. У випадку $a > 1$ функція $y = a^x$ монотонно зростає на R, а у випадку $0 < a < 1$ – монотонно спадає на R (мал. 2.1 і 2.2).



Мал. 2.1



Мал. 2.2

В обох випадках функція $y = a^x$ кожне своє додатне значення приймає лише один раз. Тому графіки функцій $y = a^x$ і $y = b$, де $b > 0$, перетинаються в одній точці. Це означає, що рівняння $a^x = b$ при $b > 0$ має єдиний розв'язок.

Для того щоб знайти цей розв'язок, треба число b подати у вигляді $b = a^c$. Матимемо рівняння

$$a^x = a^c.$$

Звідси отримаємо $x = c$.

Задача 1. Розв'язати рівняння:

1) $2^x = 32$; 2) $3^{x-1} = \sqrt[5]{9}$; 3) $4^{x^2-2x} = 1$.

Розв'язання. 1) $2^x = 32$; $2^x = 2^5$; $x = 5$.

2) $3^{x-1} = \sqrt[5]{9}$; $3^{x-1} = (3^2)^{\frac{1}{5}}$; $3^{x-1} = 3^{\frac{2}{5}}$; $x - 1 = \frac{2}{5}$; $x = 1\frac{2}{5}$.

3) $4^{x^2-2x} = 1$; $4^{x^2-2x} = 4^0$; $x^2 - 2x = 0$; $x(x - 2) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Відповідь. 1) 5; 2) $1\frac{2}{5}$; 3) 0; 2.

Зауважимо, що поки ми можемо розв'язувати не всі рівняння виду $a^x = b$. Так, наприклад, не можемо розв'язати такі рівняння, як $2^x = 5$, $3^x = 7$ тощо. Розв'язування подібних рівнянь буде розглянуто в одному з наступних параграфів.

Метод розв'язування рівняння виду $a^x = a^c$ можна узагальнити:

! *при $a > 0$, $a \neq 1$ рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.*

Задача 2. Розв'язати рівняння:

1) $4^x = 8^{x-1}$; 2) $2^x \cdot 3^x = \left(\frac{1}{6}\right)^{5-2x}$.

Розв'язання. 1) Зведемо обидві частини рівняння до степеня з однією і тією самою основою. Такою основою є число 2. Маємо: $(2^2)^x = (2^3)^{x-1}$; $2^{2x} = 2^{3x-3}$. Звідси $2x = 3x - 3$; $x = 3$.

2) Оскільки $2^x \cdot 3^x = 6^x$, а $\left(\frac{1}{6}\right)^{5-2x} = (6^{-1})^{5-2x} = 6^{2x-5}$, то початкове рівняння рівносильне такому: $6^x = 6^{2x-5}$. Звідси $x = 2x - 5$; $x = 5$.

Відповідь. 1) 3; 2) 5.

2. Зведення показникових рівнянь до найпростіших способом винесення спільного множника за дужки

Цей спосіб можна використовувати у випадку, коли рівняння містить кілька виразів виду a^{x+m}, де m – різні числа. Тоді використовуємо формулу $a^{x+m} = a^x \cdot a^m$ та виносимо за дужки спільний множник. Після спрощень отримаємо рівняння виду $a^x = b$.

Задача 3. Розв'язати рівняння

$$12 \cdot 5^{x-1} + 3 \cdot 5^x - 5^{x+1} = 10.$$

Розв'язання. $12 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^x - 5^x \cdot 5^1 = 10$;

$5^x\left(12\cdot\frac{1}{5}+3-5\right)=10$; $5^x\cdot\frac{2}{5}=10$; $5^x=10:\frac{2}{5}$; $5^x=25$; $5^x=5^2$;

$x=2$.

Відповідь. 2.

3. Рівняння виду $a^{f(x)}=b^{f(x)}$, де $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$

Поділимо ліву і праву частини рівняння $a^{f(x)}=b^{f(x)}$ на $b^{f(x)}\neq0$. Тоді $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=1$, тобто $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=\left(\frac{a}{b}\right)^{0}$, а отже, $f(x)=0$.

Задача 4. Розв'язати рівняння $2^{x-1}=5^{x-1}$.

Розв'язання. Поділимо ліву і праву частини рівняння на $5^{x-1}\neq0$. Маємо: $\frac{2^{x-1}}{5^{x-1}}=1$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{0}$; $x-1=0$; $x=1$.

Відповідь. 1.

4. Заміна змінних у показникових рівняннях

Досить часто показникове рівняння можна звести до алгебраїчного за допомогою заміни $t=a^{f(x)}$, зауважимо, що $t>0$.

Задача 5. Розв'язати рівняння $3\cdot25^x-2\cdot5^x=1$.

Розв'язання. Нехай $5^x=t>0$, тоді $25^x=5^{2x}=(5^x)^2=t^2$. Маємо: $3t^2-2t-1=0$; $t_1=1$; $t_2=-\frac{1}{3}$ – не задовольняє умову $t>0$.

Отже, $5^x=1$; $5^x=5^0$; $x=0$.

Відповідь. 0.

Задача 6. Розв'язати рівняння $\frac{5}{2^{\sqrt{x}}+1}+2=\frac{6}{2^{\sqrt{x}}-2}$.

Розв'язання. Нехай $2^{\sqrt{x}}=t$, $t>0$, тоді $\frac{5}{t+1}-\frac{6}{t-2}+2=0$.

Розв'язавши останнє рівняння, маємо $t_1=4$; $t_2=-2{,}5$ – не задовольняє умову $t>0$. Тоді $2^{\sqrt{x}}=4$; $2^{\sqrt{x}}=2^2$; $\sqrt{x}=2$; $x=4$.

Відповідь. 4.

5. Однорідні показникові рівняння

Рівняння виду

$$Aa^{2f(x)}+Ba^{f(x)}b^{f(x)}+Cb^{2f(x)}=0$$

є однорідним показниковим рівнянням другого степеня.

Метод розв'язування такого рівняння полягає в діленні лівої та правої частин на $b^{2f(x)}\neq0$ (або на $a^{2f(x)}\neq0$). Тоді маємо

$$A\left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)}+B\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}+C=0.$$

Далі заміна $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t>0$.

Задача 7. Розв'язати рівняння $2^{2x}+6^x-2\cdot9^x=0$.

Розв'язання. Оскільки $6^x=2^x\cdot3^x$, а $9^x=(3^2)^x=3^{2x}$, то рівняння зводиться до однорідного: $2^{2x}+2^x\cdot3^x-2\cdot3^{2x}=0$. Ділимо ліву і праву частини рівняння на $3^{2x}\neq0$. Маємо:

$$\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+\frac{2^x\cdot3^x}{3^{2x}}-2\frac{3^{2x}}{3^{2x}}=0;\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-2=0.$$

Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t>0$, тоді $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right)^2=t^2$.

Отже, $t^2+t-2=0$; $t_1=1$; $t_2=-2$.

Оскільки $t>0$, то $t=-2$ – не підходить. Отже, $t=1$,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1;\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{0};\ x=0.$$

Відповідь. 0.

• Які рівняння називають показниковими? • Як розв'язати рівняння виду $a^x=b$? • Як можна зводити показникові рівняння до найпростіших винесенням спільного множника за дужки? • Як розв'язати рівняння виду $a^{f(x)}=b^{f(x)}$? • Яку заміну змінних використовують у показникових рівняннях? • Який вид мають однорідні показникові рівняння і як їх розв'язують?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть рівняння (2.1–2.6):

2.1. 1) $3^x=9$; 2) $4^x=1$; 3) $2^x=32$; 4) $7^x=-7$.

2.2. 1) $5^x=5$; 2) $7^x=49$; 3) $9^x=-9$; 4) $4^x=64$.

2.3. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{27}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^x=0$; 3) $2^{x+1}=16$; 4) $6^{x-1}=6$.

2.4. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{8}$; 2) $\left(\frac{1}{7}\right)^x=0$; 3) $3^{x-1}=27$; 4) $12^{x+1}=12$.

2.5. 1) $4^{x+1}=4^{2x}$; 2) $5^{2x-3}=5^x$.

2.6. 1) $7^{x+3}=7^{2x}$; 2) $8^x=8^{2x-5}$.

Розв'яжіть рівняння (**2.7–2.14**):

2.7. 1) $3^x = \frac{1}{9}$; 2) $5^x = \sqrt{5}$; 3) $7^x = \sqrt[3]{49}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1{,}5$.

2.8. 1) $2^x = \frac{1}{16}$; 2) $7^x = \sqrt{7}$; 3) $3^x = \sqrt[5]{9}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 2{,}5$.

2.9. 1) $2^x = 5^x$; 2) $3^{x-1} = 7^{x-1}$.

2.10. 1) $3^x = 8^x$; 2) $2^{x+1} = 5^{x+1}$.

2.11. 1) $4^{x^2+2x-3} = 1$; 2) $3^{x^2-x} = 9$;

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+2x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}$; 4) $7^{x^2} = 49$.

2.12. 1) $7^{x^2-x-2} = 1$; 2) $4^{x^2+2x} = 64$;

3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-2x} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2-3x}$; 4) $2^{x^2} = 8$.

2.13. 1) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{25}{16}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 27$;

3) $\left(\frac{2}{9}\right)^{x-3} = 4{,}5^{x+2}$; 4) $\left(\sqrt{5}\right)^{x+2} = 25^x$.

2.14. 1) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{64}{27}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2+x} = 32$;

3) $3{,}5^{x-2} = \left(\frac{2}{7}\right)^{x+1}$; 4) $\left(\sqrt{3}\right)^{x-3} = 9^x$.

2.15. Знайдіть точку перетину графіків функцій $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ і $y = 7$.

2.16. Знайдіть точку перетину графіків функцій $y = 3^x$ і $y = \frac{1}{3}$.

Розв'яжіть рівняння (**2.17–2.22**):

2.17. 1) $16^{-x} = 32$; 2) $(5^{x-2})^{x-5} = 1$;

3) $(4^{x-4})^{x-2} = \frac{1}{4}$; 4) $\left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{6}{5}$.

2.18. 1) $9^{-x} = 81$; 2) $(4^{x+3})^{x-2} = 1$;

3) $(2^{x-6})^{x-3} = \frac{1}{4}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{9}{4}$.

2.19. 1) $3^{x-1} + 3^x = 12$; 2) $4^{x-1} + 4^{x+1} = 17$.

2.20. 1) $2^{x+2} + 2^x = 10$; 2) $5^{x-1} + 5^{x+1} = 130$.

2.21. 1) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; 2) $9^x + 2 \cdot 3^x - 99 = 0$.

2.22. 1) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; 2) $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$.

Розв'яжіть рівняння (**2.23–2.32**):

2.23. 1) $3^x \cdot 2^{x+3} = 288$; 2) $5^{x-1} \cdot 2^{x+2} = 800$.

2.24. 1) $5^x \cdot 2^{x+2} = 400$; 2) $3^{x+1} \cdot 4^{x-2} = 324$.

2.25. 1) $\sqrt{3^{2x}} \cdot \sqrt{2^{2x}} = 216$; 2) $\sqrt{3^x} = 27^{-\frac{2}{3}}$;

3) $\frac{1}{27}\sqrt{3^{x-1}} = 9^{-1{,}25}$; 4) $\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2x-2} = \frac{3}{4}$.

2.26. 1) $\sqrt{5^{2x}} \cdot \sqrt{2^{2x}} = 10$; 2) $\sqrt{2^x} = 4^{-\frac{3}{2}}$;

3) $\frac{1}{27}\sqrt{9^{x-1}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^{2x-1} = \sqrt{8}$.

2.27. 1) $4^{x^2+2x} = 5^{x^2+2x}$; 2) $7^{2-x} = 4^{x-2}$.

2.28. 1) $2^{x^2-3x} = 5^{x^2-3x}$; 2) $5^{x-1} = 12^{1-x}$.

2.29. 1) $2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^{2x-3} + 4 \cdot 3^{2x-4} = 151$;

2) $0{,}2^{3-2x} + 5 \cdot 0{,}04^{1-x} = 130$.

2.30. 1) $5 \cdot 2^{3x} - 3 \cdot 2^{3x-2} + 4 \cdot 2^{3x-4} = 36$;

2) $0{,}5^{5-2x} + 4 \cdot 0{,}25^{1-x} = 66$.

2.31. 1) $2^x - 6 \cdot 2^{-x} = -1$; 2) $2^{2x-2} + 5 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$;

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x + 5^{x+2} = 10$; 4) $2 + \frac{1}{4^x - 3} = \frac{1}{4^x + 2}$.

2.32. 1) $3^x - 6 \cdot 3^{-x} = 1$; 2) $3^{2x+2} - 4 \cdot 3^{x+1} + 3 = 0$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2^{x+3} = 6$; 4) $\frac{5}{9^x - 2} - 3 = \frac{4}{9^x - 1}$.

Розв'яжіть однорідне рівняння (**2.33–2.34**):

2.33. $2 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{2x} = 0$.

2.34. $2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^x \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{2x} = 0$.

Розв'яжіть рівняння (**2.35–2.38**):

2.35. 1) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 6^{x-1} + 6^x$; 2) $9^{x+\frac{1}{2}} - 2^{x+1} = 2^{x+4} - 3^{2x}$.

2.36. 1) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 12^x + 12^{x+1}$;

2) $4^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x+1} = 3^{x+2} - 7 \cdot 2^{2x}$.

2.37. 1) $8^{1+x^2} - 8^{1-x^2} = 63$; 2) $9^x - 2 \cdot 4^x + 6^x = 0$.

2.38. 1) $3^{2+x^2} - 3^{2-x^2} = 24$; 2) $25^x + 3 \cdot 10^x - 4 \cdot 4^x = 0$.

Життєва математика

2.39. Військовий збір у 2018 році складав 1,5 % від заробітної плати. Заробітна плата директора кав'ярні «Патріот» протягом року становила 12 000 грн щомісяця, кожного з трьох його бариста – 9000 грн щомісяця, а офіціантки – 8000 грн щомісяця. Крім військового збору, щомісяця у благодійний фонд на підтримку української армії директор підприємства перераховував 800 грн, кожний з його бариста – по 600 грн, а офіціантка – 400 грн. Якою є загальна суму коштів, що сплатили робітники кав'ярні у 2018 році на потреби української армії?

2.40. Одна пігулка ліків важить 20 мг і містить 5 % активної речовини. Дитині віком до 6 місяців лікар прописує 0,4 мг активної речовини на кожен кілограм маси тіла на добу. Скільки пігулок цих ліків слід дати чотиримісячній дитині з масою 5 кг протягом доби?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

Розв'яжіть нерівність **(2.41–2.42)**:

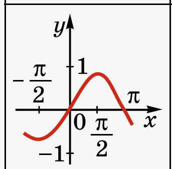
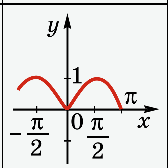
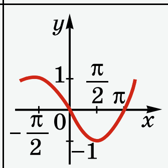
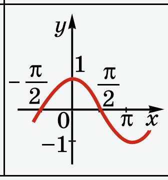
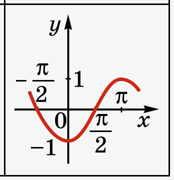
2.41. 1) $3x \geqslant 9$; 2) $-2x < 8$; 3) $4x > 0$;
4) $-5x \leqslant 0$; 5) $x^2 - 2x > 0$; 6) $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$.

2.42. 1) $1 + 2x \geqslant 9$; 2) $6 - 2x \leqslant 5$;
3) $2(3 + x) + (4 - x) \leqslant 0$; 4) $5(x + 8) + 4(1 - x) > 0$;
5) $2x^2 - 3x \geqslant 2(x - 1)$; 6) $4x(x + 2) < 5$.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 2

1. Укажіть графік функції $y = \cos(x - 2\pi)$.

А	Б	В	Г	Д
				

2. Яка з наведених функцій спадає на $(-\infty; +\infty)$?

А	Б	В	Г	Д
$y = 2x - 7$	$y = \mathrm{ctg}\,x$	$y = \sin x$	$y = 7^x$	$y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$

3. Знайдіть $f'(1)$, якщо $f(x) = \frac{6}{x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
6	–6	12	–12	інша відповідь

4. Робітник отримав аванс у розмірі 3600 грн, що становить 40 % від його заробітної плати. Якою є заробітна плата робітника?

А	Б	В	Г	Д
8000 грн	8500 грн	9000 грн	9500 грн	10 500 грн

5. Яке рівняння має безліч розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
$2x - 7 = 9$	$\cos x = \sqrt{2}$	$\sin x = 1$	$x^2 + 2x - 7 = 0$	$2x - 1 = 2x$

6. Яка з наведених функцій є парною?

А	Б	В	Г	Д
$y = x\sin x$	$y = x + \sin x$	$y = x - \sin x$	$y = \sqrt{\sin x}$	$y = \frac{1}{\sin x}$

7. Установіть відповідність між формулою зведення (1–4) та виразом, що їй тотожно дорівнює (А–Д).

Формула зведення	*Вираз, що їй тотожно дорівнює*
1 $\sin(\pi - \alpha)$	**А** 1
2 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$	**Б** $-\sin\alpha$
3 $\cos(2\pi + \alpha)$	**В** $-\cos\alpha$
4 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$	**Г** $\cos\alpha$
	Д $\sin\alpha$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Прибуток деякого підприємства прямо пропорційний кількості виробленої продукції. На підприємстві робочий день зменшився з 8 год до 7 год. На скільки відсотків треба підвищити продуктивність праці, щоб прибуток підприємства зріс на 5 %?

9. Чому дорівнює на проміжку $[-1; 1]$ найбільше значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$?

§ 3. ПОКАЗНИКОВІ НЕРІВНОСТІ

Аналогічно рівнянню *нерівність* називають *показниковою*, якщо змінна входить лише до показників степенів.

Приклади показникових нерівностей:

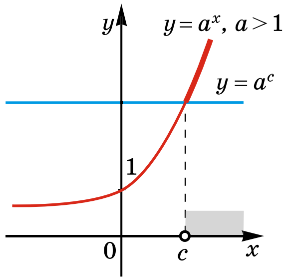
$$3^x \geqslant 9,\ 2^x + 2^{x-1} < 6 \text{ тощо.}$$

1. Найпростіші показникові нерівності

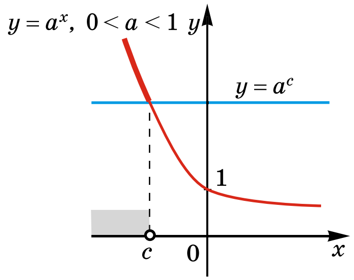
До найпростіших показникових нерівностей можна віднести такі: $a^x > b$, $a^x < b$, $a^x \geqslant b$, $a^x \leqslant b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, b – число.

Розглянемо для прикладу нерівність $a^x > b$, де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$. Нехай $b = a^c$, тоді $a^x > a^c$. Якщо $a > 1$, то функція $y = a^x$ зростає (мал. 3.1) і більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу. Тому з нерівності $a^x > a^c$ отримуємо $x > c$ (знак нерівності не змінюється).

Якщо $0 < a < 1$, то функція $y = a^x$ – спадна (мал. 3.2) і більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу. Тому з нерівності $a^x > a^c$ отримуємо $x < c$ (знак нерівності змінюється на протилежний).



Мал. 3.1



Мал. 3.2

Аналогічно можна розв'язати нерівність виду $a^x < b$, $a^x \geqslant b$, $a^x \leqslant b$, де $b > 0$. Якщо $b \leqslant 0$, то деякі з наведених нерівностей не будуть мати розв'язків, а розв'язками деяких буде множина R.

Задача 1. Розв'язати нерівність:

1) $2^x \geqslant 4$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{27}$; 3) $3^x > -9$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \leqslant -5$.

Розв'язання. 1) $2^x \geqslant 2^2$. Оскільки $y = 2^x$ – функція зростаюча, то маємо $x \geqslant 2$.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Оскільки $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ – функція спадна, то маємо $x > 3$.

3) Оскільки $3^x > 0$ для всіх значень x, то розв'язками даної нерівності є всі числа: $x \in R$.

4) Оскільки $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 0$ для всіх значень x, то дана нерівність не має розв'язків.

Відповідь. 1) $x \geqslant 2$; 2) $x > 3$; 3) $x \in R$; 4) немає розв'язків.

Метод розв'язування нерівності $a^x > b$, де $b = a^c$, можна узагальнити для нерівності виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$. Подамо метод розв'язування такої нерівності у вигляді таблиці.

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	
$0 < a < 1$	$a > 1$
Знак нерівності змінюється на протилежний $f(x) < g(x)$	Знак нерівності не змінюється $f(x) > g(x)$

Аналогічно розв'язується нерівність виду $a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)}$.

Задача 2. Розв'язати нерівність:

1) $2^{2x-3} > 4^{5-x}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}$.

Розв'язання. 1) $2^{2x-3} > (2^2)^{5-x}$; $2^{2x-3} > 2^{10-2x}$; $2x - 3 > 10 - 2x$; $4x > 13$; $x > 3{,}25$.

2) Оскільки $0 < \frac{1}{3} < 1$, то маємо:

$$x^2 - 2x \geqslant x + 4;\ x^2 - 3x - 4 \geqslant 0.$$

Розв'язавши останню нерівність, отримаємо $x \leqslant -1$ або $x \geqslant 4$.

Відповідь. 1) $x > 3{,}25$; 2) $x \leqslant -1$ або $x \geqslant 4$.

2. Розв'язування складніших показникових нерівностей

Під час розв'язування складніших показникових нерівностей використовують ті самі прийоми, що й під час розв'язування рівнянь: спосіб винесення за дужки спільного множника, заміну змінних тощо, намагаючись зводити нерівності до найпростіших.

Задача 3. Розв'язати нерівність $3^{x+2} - 3^x > 24$.

Розв'язання. $3^x \cdot 3^2 - 3^x > 24$; $3^x(9 - 1) > 24$; $3^x \cdot 8 > 24$; $3^x > 3$; $3^x > 3^1$; $x > 1$.

Відповідь. $x > 1$.

Задача 4. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-3>0.$

Розв'язання. Нехай $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=t$, тоді $t^2+2t-3>0$. Розв'язавши останню нерівність, отримаємо $t<-3$ або $t>1$. Повертаємося до змінної x:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<-3 \quad \text{або} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{x}>1.$$

Немає розв'язків	$\left(\frac{1}{3}\right)^{x}>\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$ $x<0$

Відповідь. $x<0$.

● Які нерівності називають показниковими? ● Як розв'язати нерівність виду $a^x>b$, де $b=a^c$, при $a>1$; при $0<a<1$? ● До якої нерівності зводиться нерівність $a^{f(x)}>a^{g(x)}$, якщо $a>1$; якщо $0<a<1$?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть нерівність (3.1–3.8):

3.1. 1) $2^x>2^5$; 2) $3^x\leqslant 3^{-7}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{x}<\left(\frac{4}{7}\right)^{2}$.

3.2. 1) $3^x<3^8$; 2) $5^x\geqslant 5^{-3}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}>\left(\frac{2}{3}\right)^{4}$.

2 **3.3.** 1) $3^x\geqslant 27$; 2) $(1{,}2)^x<1{,}44$; 3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x}>\frac{1}{64}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x}\leqslant 1$.

3.4. 1) $2^x\leqslant 32$; 2) $1{,}3^x>1{,}69$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\frac{1}{27}$; 4) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x}\geqslant 1$.

3.5. 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\geqslant 16$; 2) $(\sqrt{3})^x<\frac{1}{3}$; 3) $0{,}2^x\leqslant 25$; 4) $0{,}7^x>1\frac{3}{7}$.

3.6. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<27$; 2) $(\sqrt{5})^x\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $0{,}5^x>4$; 4) $0{,}6^x\leqslant 1\frac{2}{3}$.

3.7. 1) $4^{2x-7}>1$; 2) $5^{3x+1}\geqslant 25$; 3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2x}<4$; 4) $2^{x^2+1}\leqslant 32$.

3.8. 1) $5^{3x-4}<1$; 2) $4^{2x+1}\leqslant 64$; 3) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-3x}>9$; 4) $5^{x^2-1}\geqslant 125$.

3 Знайдіть область визначення функції (3.9–3.10):

3.9. 1) $y=\sqrt{16-2^x}$; 2) $y=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1}$.

3.10. 1) $y=\sqrt{3^x-9}$; 2) $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{x}}$.

Розв'яжіть нерівність (3.11–3.12):

3.11. 1) $\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^{x-3{,}5}>\sqrt{8}$; 2) $9^{0{,}5x^2-3}\geqslant 27$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x}<\frac{1}{8}$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x|-2}\geqslant 5$.

3.12. 1) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2{,}5-x}\geqslant\sqrt{2}$; 2) $4^{0{,}5x^2-3}<8$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x}>\frac{1}{9}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{|x|-3}\leqslant 7$.

Знайдіть область визначення функції (3.13–3.14):

3.13. 1) $y=\sqrt{4^x-2^{x+5}}$; 2) $y=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3}-\left(\frac{1}{8}\right)^{x}}$.

3.14. 1) $y=\sqrt{3^{x+7}-9^x}$; 2) $y=\sqrt{\left(\frac{1}{125}\right)^{x}-\left(\frac{1}{25}\right)^{2x-5}}$.

Розв'яжіть нерівність (3.15–3.20):

3.15. 1) $5^x+5^{x-2}\geqslant 26$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}<-24$.

3.16. 1) $3^{x+1}+3^x>36$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}-\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\leqslant 100$.

3.17. 1) $4^x-2^x-12\geqslant 0$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x}-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+3<0$.

3.18. 1) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \leqslant 0$; 2) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^x + \left(\dfrac{1}{5}\right)^x - 2 > 0$.

3.19. 1) $\dfrac{4^x - 8}{2x^2 + 5} \geqslant 0$; 2) $\dfrac{0{,}3^x - 0{,}027}{-x^2 - 5} < 0$.

3.20. 1) $\dfrac{25^x - 5}{x^2 + 17} \leqslant 0$; 2) $\dfrac{0{,}1^x - 0{,}01}{-2x^2 - 9} > 0$.

3.21. Розв'яжіть нерівність $7^{x+1} - 2 \cdot 7^x < 5^{x+3} - 118 \cdot 5^x$.

3.22. Розв'яжіть нерівність $5^{x+1} - 2 \cdot 5^x > 3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-1}$.

3.23. Розв'яжіть нерівність $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x \leqslant 0$.

3.24. Розв'яжіть нерівність $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x \geqslant 0$.

3.25. Розв'яжіть графічно нерівність $3^x \geqslant 4 - x$.

3.26. Розв'яжіть графічно нерівність $2^x < 3 - x$.

Життєва математика

3.27. Катерина Ощадлива для роботи використовувала власний автомобіль, який потребує 8,8 л бензину на 100 км. Компанія вирішила придбати автомобіль, який споживає 3,8 л на 100 км.

1) Скільки літрів бензину зекономить Катерина за день роботи на новому автомобілі, коли щодня вона проїжджає в середньому 60 км?

2) Скільки грошей зекономить Катерина щодня, якщо один літр бензину коштує 28 грн?

3.28. Улітку учні школи заготовляють для шкільного буфету 8 кг квітів липи.

1) Скільки склянок чаю можна буде заварити, якщо на один стакан іде 2 г квітів?

2) На скільки днів вистачить заготовки квітів липи, якщо за один день липовий чай купують 100 осіб?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 3

1. Знайдіть проміжок спадання функції $y = 2x^3 - 3x^2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0]$	$[0; 1]$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 1]$	$[0; +\infty)$

2. Яку цифру з наведених треба поставити замість зірочки в числі 1234^*, щоб воно ділилося на 3 без остачі?

А	Б	В	Г	Д
1	3	5	7	9

3. Скоротіть дріб $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{1}{6x}$	$\dfrac{x+3}{x-3}$	1	$\dfrac{x-3}{x+3}$	скоротити неможливо

4. При яких значеннях a і b, відмінних від нуля, виконується рівність $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$?

А	Б	В	Г	Д
$a > 0$, $b > 0$	$a > 0$, $b < 0$	$a < 0$, $b > 0$	$a < 0$, $b < 0$	ні при яких

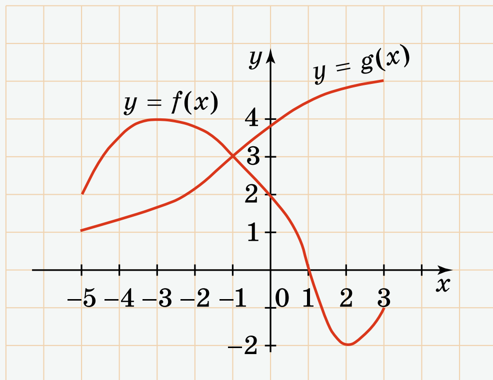
5. Обчисліть $4\sin\dfrac{\pi}{6} + 2\cos\dfrac{2\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

6. Скільки коренів має рівняння $2 \cdot 7^x + 14 = 0$?

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	понад 3

7. На малюнку зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$, визначених на проміжку $[-5; 3]$. Установіть відповідність між аргументом x_0 (1–4) та значенням функції $y = f(x_0)$ (А–Д).



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Аргумент		Значення функції	
1	x_0 – абсциса точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Oy	А	-2
2	x_0 – точка мінімуму функції $y = f(x)$	Б	0
3	x_0 – точка максимуму функції $y = f(x)$	В	2
4	x_0 – абсциса точки перетину графіків функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$	Г	3
		Д	4

8. Знайдіть найбільше ціле число, що належить області визначення функції $y = \sqrt{3x - x^2}$.

9. Обчисліть суму десяти перших членів арифметичної прогресії a_n, у якої $a_2 = 9$, $a_4 = 15$.

§ 4. ЛОГАРИФМИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

В одному з попередніх параграфів ви навчилися розв'язувати рівняння $a^x = b$ у випадку, коли число b можна подати у вигляді $b = a^c$, де c – раціональне число. У цьому параграфі розглянемо, як розв'язується рівняння $a^x = b$ в інших випадках. Для цього потрібно ввести поняття *логарифма*.

1. Логарифм

Повернемося до рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, яке має розв'язок при $b > 0$. Цей розв'язок – число x – називають *логарифмом числа b за основою a* та записують так: $\log_a b$.

***Логарифмом числа b за основою a* називають показник степеня, до якого треба піднести a, щоб отримати b.**

Приклад 1.

1) $\log_2 32 = 5$ (оскільки $2^5 = 32$).

2) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ (оскільки $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$).

3) $\log_5 \frac{1}{5} = -1 \left(\text{оскільки } 5^{-1} = \frac{1}{5} \right)$.

4) $\log_7 \frac{1}{\sqrt{7}} = -\frac{1}{2} \left(\text{оскільки } 7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \right)$.

Оскільки рівняння $a^x = b$ розглядається для $a > 0$, $a \neq 1$, то число a – основа логарифма – є числом додатним і відмінним від 1. Число b, як було зазначено вище, – додатне. Отже,

вираз $\log_a b$ має зміст, якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$.

Використовуючи означення логарифма, тепер можемо розв'язувати будь-яке показникове рівняння виду $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Задача 1. Розв'язати рівняння: 1) $3^x = 5$; 2) $7^{x-1} = 19$.

Розв'язання. 1) За означенням логарифма: $x = \log_3 5$.
2) Маємо $x - 1 = \log_7 19$, звідси $x = 1 + \log_7 19$.

Відповідь. 1) $\log_3 5$; 2) $1 + \log_7 19$.

Оскільки $\log_a b$ – розв'язок рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$, тобто $x = \log_a b$, то маємо:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Цю формулу називають *основною логарифмічною тотожністю*. Її використовують для обчислення виразів з логарифмами, доведення властивостей логарифмів тощо.

Задача 2. Обчислити: 1) $3^{\log_3 7}$; 2) $5^{2\log_5 3}$.

Розв'язання. 1) $3^{\log_3 7} = 7$; 2) $5^{2\log_5 3} = (5^{\log_5 3})^2 = 3^2 = 9$.

Відповідь. 1) 7; 2) 9.

2. Основні властивості логарифмів

Крім основної логарифмічної тотожності, є ще кілька важливих *властивостей логарифмів*. Розглянемо їх.

Т Теорема (основні властивості логарифмів). **Для будь-якого $a > 0$, $a \neq 1$ і $x > 0$, $y > 0$ виконуються рівності:**

1. $\log_a 1 = 0$.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
5. $\log_a x^p = p\log_a x$, $p \in R$.

Доведення.
1) $\log_a 1 = 0$ (оскільки $a^0 = 1$).
2) $\log_a a = 1$ (оскільки $a^1 = a$).

3) За основною логарифмічною тотожністю $x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$. Перемножимо ці рівності почленно: $xy = a^{\log_a x} \times$ $\times\, a^{\log_a y}$, тобто $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$. За означенням логарифма:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

4) Поділимо почленно рівності $x = a^{\log_a x}$ і $y = a^{\log_a y}$. Маємо $\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$. А тому за означенням логарифма:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

5) Оскільки $x = a^{\log_a x}$, то $x^p = (a^{\log_a x})^p = a^{p\log_a x}$. За означенням логарифма:

$$\log_a x^p = p\log_a x. \blacksquare$$

Властивість $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ коротко формулюють так:

логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників,

а властивість $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ так:

логарифм частки дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника.

Зауважимо, що властивість $\log_a x^p = p\log_a x$ у випадку, коли p – ціле парне число, тобто $p = 2m$, $m \in Z$ можна розглядати і для від'ємних значень x. Тоді

$$\boldsymbol{\log_a x^{2m} = 2m\log_a |x|, \text{ де } x \neq 0,\ m \in Z.}$$

Розглянемо приклади використання властивостей логарифмів.

Приклад 2. $\log_7 1 = 0$, $\log_8 8 = 1$.

За допомогою властивостей логарифмів можна логарифмувати вирази, що містять операції множення, ділення, піднесення до степеня. **Прологарифмувати вираз** означає виразити його логарифм через логарифми додатних чисел і логарифми змінних, що входять до нього.

Задача 3. Прологарифмувати вираз $\frac{16a^5\sqrt[3]{b^7}}{\sqrt[8]{c}}$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, за основою 2.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів, маємо:

$$\log_2 \frac{16a^5\sqrt[3]{b^7}}{\sqrt[8]{c}} = \log_2 \frac{16a^5 b^{\frac{7}{3}}}{c^{\frac{1}{8}}} = \log_2\left(16a^5 b^{\frac{7}{3}}\right) - \log_2 c^{\frac{1}{8}} = \log_2 16 +$$

$$+\log_2 a^5 + \log_2 b^{\frac{7}{3}} - \log_2 c^{\frac{1}{8}} = 4 + 5\log_2 a + \frac{7}{3}\log_2 b - \frac{1}{8}\log_2 c.$$

Відповідь. $4 + 5\log_2 a + \frac{7}{3}\log_2 b - \frac{1}{8}\log_2 c$.

Формули логарифма добутку та частки можна використовувати й справа наліво для обчислення та спрощення виразів.

Задача 4. Обчислити:

1) $\log_{36}2 + \log_{36}18$; 2) $\log_3 18 - \log_3 2$.

Розв'язання. 1) $\log_{36}2 + \log_{36}18 = \log_{36}(2 \cdot 18) = \log_{36}36 = 1$;

2) $\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \frac{18}{2} = \log_3 9 = 2$.

Відповідь. 1) 1; 2) 2.

Іноді доводиться шукати вираз за його логарифмом. Таку операцію називають *потенціюванням*.

Задача 5. Знайти x, якщо $\log_5 x = \log_5 64 + 2\log_5 7 - 3\log_5 8$.

Розв'язання. 1) Спочатку перетворимо праву частину:

$$\log_5 64 + 2\log_5 7 - 3\log_5 8 = \log_5 64 + \log_5 7^2 - \log_5 8^3 =$$

$$= \log_5 \frac{64 \cdot 49}{64 \cdot 8} = \log_5 \frac{49}{8} = \log_5 6{,}125.$$

2) Отже, $\log_5 x = \log_5 6{,}125$, а тому $x = 6{,}125$.

Відповідь. 6,125.

3. Формули переходу до іншої основи

Прологарифмуємо обидві частини основної логарифмічної тотожності $a^{\log_a b} = b$ за основою c, де $c > 0$, $c \neq 1$:

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Використовуючи властивість 5, маємо:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b.$$

Звідси отримуємо *формулу переходу до іншої основи*:

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.}$$

Задача 6. Обчислити $\log_{32}64$.

Розв'язання. Перейдемо до основи 2:

$$\log_{32}64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 32} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

Відповідь. 1,2.

Розглянемо важливі наслідки формули переходу до іншої основи.

Якщо в цій формулі покласти $c = b$, то матимемо *формулу переходу від основи a до основи b*:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Задача 7. Обчислити $\log_{81}3$.

Розв'язання. $\log_{81}3 = \frac{1}{\log_3 81} = \frac{1}{4}$.

Відповідь. $\frac{1}{4}$.

Якщо у формулі переходу до іншої основи покласти замість a вираз a^q, то матимемо:

$$\log_{a^q} b = \frac{\log_c b}{\log_c a^q} = \frac{\log_c b}{q \cdot \log_c a} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{q}\log_a b.$$

Отже,

$$\log_{a^q} b = \frac{1}{q}\log_a b.$$

Об'єднуючи цю властивість і властивість 5 основних властивостей логарифмів, матимемо:

$$\log_{a^q} x^p = \frac{p}{q}\log_a x, \text{ де } a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0.$$

Задача 8. Обчислити $\log_{243}81$.

Розв'язання. $\log_{243}81 = \log_{3^5}3^4 = \frac{4}{5}\log_3 3 = \frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5}$.

Відповідь. $\frac{4}{5}$.

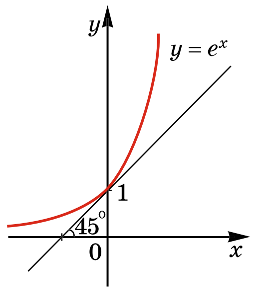
Зауважимо, що, звичайно, цей приклад можна було розв'язати і за допомогою формули переходу до основи 3.

4. Десятковий і натуральний логарифми

Логарифм числа b за основою 10 називають *десятковим* і позначають $\lg b$.

У більшості калькуляторів і комп'ютерних програм десятковий логарифм позначають так: log (тобто логарифм без зазначення основи). Отже, щоб обчислити наближене значення $\log_2 7$ за допомогою калькулятора, використаємо формулу $\log_2 7 = \frac{\lg 7}{\lg 2}$, а далі обчислення $\log_2 7 \approx \frac{0{,}8450980}{0{,}3010299} \approx 2{,}8074$ (з точністю до десятитисячних).

Розглядаючи різні графіки показникової функції $y = a^x$, можна помітити, що всі вони проходять через точку (0; 1). Існує таке число, яке позначають літерою e, що дотична, проведена до графіка функції $y = e^x$ у точці (0; 1), утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45° (мал. 4.1).



Мал. 4.1

Кутовий коефіцієнт дотичної, очевидно, дорівнює tg45°, тобто $k = 1$.

Число e відіграє значну роль у математичному аналізі, а функцію $y = e^x$ називають ще *експонентою*.

Число e – ірраціональне, $e \approx 2{,}7182818284...$

Логарифм числа b за основою e називають *натуральним* і позначають $\ln b$.

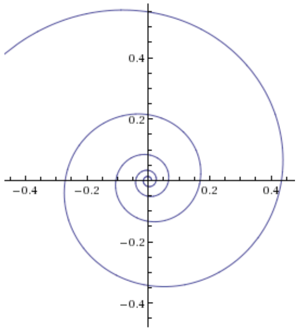
У більшості калькуляторів і комп'ютерних програм є натуральний логарифм, позначення якого збігається з нашим позначенням.

5. Застосовування логарифмів для опису реальних процесів

Логарифми використовують для опису реальних процесів у фізиці, хімії, астрономії. Так, наприклад, відомий вчений К. Ціолковський (1857–1935) вивів формулу для розрахунку абсолютної (характеристичної) швидкості ракети, яка містить логарифм. Під час будівництва ставків потрібно враховувати кількість води, що прибуватиме у ставок під час повені; розрахунки проводять за допомогою логарифмів.

Двійковий логарифм числа (тобто логарифм за основою 2) широко використовується в теорії інформації. Так, наприклад, він дає змогу визначити число цифр у внутрішньому комп'ютерному поданні числа; на двійкових логарифмах засновано інформаційну ентропію (міра кількості інформації) тощо. У теорії музики, щоб визначити, на скільки частин ділити октаву, потрібно відшукати раціональне наближення для числа $\log_2 1{,}5 \approx 0{,}585$, що дає змогу після додаткових обчислень обґрунтувати класичний розподіл октав на 12 півтонів.

Десяткові логарифми та логарифмічна шкала, що основана на цих логарифмах, використовуються в багатьох областях науки, наприклад: у фізиці (для вимірювання інтенсивності звуку в децибелах), астрономії (шкала яскравості зірок), хімії (активність водневих іонів), сейсмології (шкала Ріхтера), теорії музики (нотна шкала відносно частоти нотних звуків), історії (логарифмічна шкала часу) тощо.



Мал. 4.2

Мал. 4.3

У природі часто трапляється особливий вид спіралі – логарифмічна спіраль (мал. 4.2). Логарифмічна спіраль була вперше описана Р. Декартом і пізніше ґрунтовно досліджена Я. Бернуллі. Розмір витків логарифмічної спіралі поступово збільшується, але їх форма залишається незмінною. Можливо, унаслідок цієї властивості, логарифмічна спіраль описує багато природних процесів зростання чи спадання, розміщення квіток соняшників, подібних до мушель малюсків (мал. 4.3) тощо.

6. Експонента в описі реальних процесів

Як зазначено вище у цьому параграфі, функцію $y = e^x$ називають експонентою; інші функції з основою e називають також експотенціальними. Ці функції відіграють значну роль у побуті та науці. Розглянемо кілька прикладів.

Мабуть, ви помітили, що коли зняти киплячий чайник з вогню, то спочатку він швидко остигає, а потім остигання йде набагато повільніше. Це відбувається тому, що швидкість охолодження пропорційна різниці між температурою чайника і температурою навколишнього середовища. Якщо спочатку температура чайника дорівнювала T_0, а температура повітря – T_1, то через t секунд температура T чайника виражається формулою $T = (T_1 - T_0)e^{-kt+T_1}$, де k – число, що залежить від форми чайника, його матеріалу тощо.

Зміну кількості населення в населеному пункті протягом незначного інтервалу часу можна подати за допомогою формули $N = N_0e^{kt}$, де N_0 – число людей при $t = 0$, N – число людей на момент часу t, k – деяка постійна.

Радимо знайти в літературі та Інтернеті інші цікаві застосування логарифмів та експоненти.

А ще раніше...

Протягом XVI ст. значно зріс обсяг робіт, які пов'язані з наближеними обчисленнями під час розв'язування прикладних задач (особливо в астрономії). Найбільші труднощі виникали при діленні та множенні великих чисел.

Саме в цей час було винайдено логарифми, які давали змогу зводити множення і ділення чисел до, відповідно, додавання і віднімання логарифмів. Широкого застосування логарифми отримали після того, як незалежно один від одного склали таблиці логарифмів два математики Дж. Непер і І. Бюргі.

Дж. Непер (1550–1617)

І. Бюргі (1552–1632)

Л. Ейлер (1707–1783)

Шотландський математик Дж. Непер у книжках, виданих у 1614 і 1619 рр., склав таблиці логарифмів синусів, косинусів і тангенсів кутів від 0° до 90° з кроком в 1 мінуту, що було дуже цінним для астрономів. Швейцарський математик І. Бюргі свої таблиці готував, швидше за все, ще до 1610 р., але вийшли вони лише в 1620 р., а тому не набули популярності.

Перші таблиці десяткових логарифмів у 1617 р. видав англійський математик Г. Брігс (1561–1630), а натуральних логарифмів – у 1619 р. інший англійський математик Дж. Спейдель (1607–1647).

Сучасне означення логарифма дав видатний математик, фізик, механік і астроном Л. Ейлер. Він також увів поняття основи логарифма, позначення log *і* e*.*

У 1623 р. англійський математик Е. Гунтер (1581–1626) винайшов шкалу, на якій ґрунтується логарифмічна лінійка, яку потім неодноразово удосконалювали і яка до 70-х років XX ст. була обчислювальним засобом для представників багатьох спеціальностей. Тільки після поширення калькуляторів та інших сучасних засобів обчислення логарифмічні таблиці та лінійки перестали бути засобами обчислення та посіли свої законні місця в музеях математики.

- Що називають логарифмом числа b за основою a?
- При яких a і b має зміст вираз $\log_a b$?
- Запишіть основну логарифмічну тотожність.
- Сформулюйте й доведіть основні властивості логарифмів.
- Запишіть формулу переходу до іншої основи та наслідки з неї.
- Що називають десятковим логарифмом, а що – натуральним логарифмом?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

4.1. (*Усно.*) Які з виразів мають зміст:
1) $\log_2(-1)$; 2) $\lg 8$; 3) $\log_7 0$; 4) $\ln 1{,}5$?

Чи правильна рівність (**4.2–4.3**):

4.2. 1) $\log_7 1 = 0$; 2) $\log_2 4 = 2$; 3) $\log_2 8 = 3$;
4) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$; 5) $\log_5 0{,}2 = -1$; 6) $\lg 0{,}01 = -2$;
7) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$; 8) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = -6$?

4.3. 1) $\log_8 8 = 1$; 2) $\log_3 9 = 2$; 3) $\log_2 32 = 5$;
4) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$; 5) $\log_9 \frac{1}{81} = -2$; 6) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$;
7) $\lg 0{,}1 = -1$; 8) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5} = -2$?

Знайдіть (**4.4–4.5**):

4.4. 1) $\log_9 9$; 2) $\log_2 16$; 3) $\log_{17} 1$; 4) $\log_7 49$.

4.5. 1) $\log_5 1$; 2) $\log_3 27$; 3) $\log_7 7$; 4) $\log_5 25$.

Обчисліть (**4.6–4.7**):

4.6. 1) $3^{\log_3 7}$; 2) $0{,}8^{\log_{0,8} 3}$.

4.7. 1) $0{,}9^{\log_{0,9} 0{,}5}$; 2) $5^{\log_5 8}$.

2 Знайдіть (**4.8–4.9**):

4.8. 1) $\log_9 \frac{1}{9}$; 2) $\log_2 \frac{1}{16}$; 3) $\log_3 \frac{1}{81}$; 4) $\lg 0{,}001$;
5) $\log_{13} \sqrt{13}$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 7) $\log_{\sqrt{3}} 81$; 8) $\lg 10\sqrt{10}$.

4.9. 1) $\log_7 \frac{1}{7}$; 2) $\log_3 \frac{1}{27}$; 3) $\log_5 \frac{1}{25}$; 4) $\lg 0{,}0001$;
5) $\log_{\sqrt{5}} 5$; 6) $\log_{\frac{1}{5}} 25$; 7) $\log_{17} \sqrt{17}$; 8) $\lg 100\sqrt{10}$.

Знайдіть значення виразу, якщо $a > 0$, $a \neq 1$ (**4.10–4.11**):

4.10. 1) $\log_a a^8$; 2) $\log_a \sqrt{a}$; 3) $\log_a \frac{1}{a}$; 4) $\log_a \frac{1}{a^4}$.

4.11. 1) $\log_a a^5$; 2) $\log_a \sqrt[3]{a}$; 3) $\log_a \sqrt{a^5}$; 4) $\log_a \frac{1}{a^3}$.

Знайдіть логарифми наведених чисел за основою a (**4.12–4.13**):

4.12. 1) 64; $\frac{1}{8}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[5]{2}$, якщо $a = 2$;
2) 125; $\frac{1}{25}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{25}$, якщо $a = 5$.

4.13. 1) 9; $\frac{1}{243}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[5]{9}$, якщо $a = 3$;
2) 64; 2; $\frac{1}{16}$; $\sqrt[7]{4}$, якщо $a = 4$.

Розв'яжіть рівняння (**4.14–4.15**):

4.14. 1) $2^x = 7$; 2) $7^{x+1} = 9$.

4.15. 1) $3^x = 5$; 2) $11^{x-1} = 8$.

Обчисліть (**4.16–4.17**):

4.16. 1) $\frac{1}{2}\log_5 25 - \frac{1}{4}\log_2 128$; 2) $2\log_2 \frac{1}{4} + 4\log_{\frac{1}{3}} 27$.

4.17. 1) $\frac{1}{4}\log_6 36 + \frac{1}{2}\log_3 81$; 2) $4\log_3 \frac{1}{9} - 2\log_{\frac{1}{2}} 16$.

Знайдіть значення виразу (**4.18–4.19**):

4.18. 1) $2^{3\log_2 5}$; 2) $3^{\frac{1}{2}\log_3 4}$; 3) $5^{1+\log_5 7}$; 4) $7^{\log_7 3-1}$.

4.19. 1) $17^{2\log_{17} 3}$; 2) $4^{\frac{1}{2}\log_4 25}$; 3) $9^{1+\log_9 2}$; 4) $15^{\log_{15} 2-1}$.

Обчисліть (**4.20–4.21**):

4.20. 1) $\log_6 3 + \log_6 2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 32 - \log_{\frac{1}{2}} 16$;
3) $\log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{2}$; 4) $\lg 4 + \lg 25$.

4.21. 1) $\log_{21} 3 + \log_{21} 7$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 45 - \log_{\frac{1}{3}} 15$;
3) $\lg \sqrt{30} - \lg \sqrt{3}$; 4) $\log_6 4 + \log_6 9$.

Знайдіть значення виразу (**4.22–4.23**):

4.22. 1) $\log_2 \sqrt[3]{2^4}$; 2) $\log_9 \sqrt{9^5}$; 3) $\frac{\lg 8}{\lg 2}$; 4) $\frac{\log_7 81}{\log_7 3}$.

4.23. 1) $\log_3 \sqrt[5]{3^7}$; 2) $\log_8 \sqrt{8^7}$; 3) $\frac{\log_5 16}{\log_5 2}$; 4) $\frac{\lg 27}{\lg 3}$.

Прологарифмуйте вираз ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$) (**4.24–4.25**):

4.24. 1) $8a^2b^7\sqrt{c}$ за основою 2; 2) $\frac{1}{7}a\sqrt[3]{b}c^5$ за основою 7.

4.25. 1) $81\sqrt[5]{a}bc^7$ за основою 3; 2) $\frac{1}{5}a^7\sqrt[4]{b}c$ за основою 5.

Знайдіть x з умови (**4.26–4.27**):

4.26. 1) $\lg x = \lg 4 - \lg 2 + \lg 3$; 2) $\log_4 24 + \log_4 5 - \log_4 6 = \log_4 x$.

4.27. 1) $\log_5 x = \log_5 34 - \log_5 2 + \log_5 4$;
2) $\lg 8 - \lg 4 + \lg 5 = \lg x$.

4.28. Дано: $\lg x = a$, $\lg y = b$. Виразіть через a і b десяткові логарифми чисел:
1) xy; 2) $\frac{x}{y}$; 3) y^3;
4) $x^{\frac{1}{4}}$; 5) x^3y^2; 6) $\sqrt[3]{xy}$.

4.29. Відомо, що $\lg 2 \approx 0{,}301$. Знайдіть:
1) $\lg 20$; 2) $\lg 2000$; 3) $\lg 0{,}2$; 4) $\lg 0{,}02$.

4.30. Відомо, що $\lg 5 \approx 0{,}699$. Знайдіть:
1) $\lg 50$; 2) $\lg 500$; 3) $\lg 0{,}5$; 4) $\lg 0{,}005$.

Обчисліть (**4.31–4.34**):

4.31. 1) $\log_2(4\log_6 36)$; 2) $\log_{12}\left(3\log_{\sqrt{5}} 25\right)$;
3) $\log_{1,5}\log_4 8$; 4) $\lg(5\log_7 49)^2$.

4.32. 1) $\log_3(3\log_5 125)$; 2) $\log_{0,5}\log_5\sqrt{5}$;
3) $\log_{0,75}\log_8 16$; 4) $\lg(2\lg 10^5)^3$.

4.33. 1) $\log_{13}\frac{1}{\sqrt[5]{13^2}}$; 2) $\log_{27}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; 3) $\log_{\sqrt{8}}(16\sqrt{2})$; 4) $\log_{32}\sqrt[3]{2}$.

4.34. 1) $\log_2\frac{1}{\sqrt[7]{2^{13}}}$; 2) $\log_{16}\cos\frac{\pi}{3}$; 3) $\log_{\sqrt{5}}(125\sqrt{5})$; 4) $\log_9\sqrt[5]{3}$.

4.35. Прологарифмуйте вираз за основою 2 ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$):
1) $\frac{\sqrt[5]{16a^3}\sqrt[7]{b}}{\sqrt[5]{c^2}}$; 2) $\sqrt[6]{\frac{ab^7}{32c^5}}$.

4.36. Прологарифмуйте вираз за основою 3 ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$):
1) $\frac{\sqrt[4]{27b^7}\sqrt[5]{c}}{\sqrt[9]{a^5}}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{ac^4}{9b^3}}$.

Обчисліть (**4.37–4.40**):

4.37. 1) $\frac{\ln 27 + \ln 12}{\ln 2 + 2\ln 3}$; 2) $\frac{\log_8 27 - 2\log_8 3}{\log_8 45 + \log_8 0{,}2}$.

4.38. 1) $\frac{\log_{12} 81 + \log_{12} 64}{2\log_{12} 3 + 3\log_{12} 2}$; 2) $\frac{2\ln 4 + \ln 0{,}5}{\ln 6 - \ln 12}$.

4.39. 1) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}\log_{\frac{1}{8}} 81}$; 2) $9^{1-\log_3 5}$;
3) $2^{\log_4 25 + \log_{16} 625}$; 4) $100^{\lg\frac{1}{3} - \lg 2}$.

4.40. 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{7}} 8}$; 2) $4^{2-\log_2 6}$; 3) $3^{\log_9 16 - \log_{27} 8}$; 4) $1000^{\lg 2 - \lg 4}$.

Знайдіть x, якщо (**4.41–4.42**):

4.41. 1) $\log_{0,6} x = 5\log_{0,6} 3 - \frac{1}{3}\log_{0,6} 27 - 3\log_{0,6} 6$;
2) $\log_2 x = \log_4 8 + 2\log_4 5 - \log_4 2$.

4.42. 1) $\log_{18} x = 2\log_{18} 6 - 2\log_{18} 4 + 3\log_{18}\sqrt[3]{20}$;
2) $\lg x = \log_{100} 32 + 2\log_{100} 3 - \log_{100} 2$.

4.43. Відомо, що $\log_3 2 = m$, $\log_3 7 = n$. Виразіть через m і n:
1) $\log_3 14$; 2) $\log_3 6$; 3) $\log_3 28$; 4) $\log_2 7$.

4.44. Відомо, що $\log_2 3 = x$, $\log_2 5 = y$. Виразіть через x і y:
1) $\log_2 15$; 2) $\log_2 6$; 3) $\log_2 75$; 4) $\log_3 5$.

Розв’яжіть рівняння (**4.45–4.46**):

4.45. 1) $4^x - 4 \cdot 2^x - 5 = 0$; 2) $25^x - 5^{x+1} + 4 = 0$.

4.46. 1) $9^x - 3^x - 2 = 0$; 2) $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$.

4.47. Доведіть формулу $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Порівняйте (**4.48–4.49**):

4.48. 1) $7^{\log_8 9}$ і $9^{\log_8 7}$; 2) $2^{\lg 3}$ і $3^{\lg 2} + 0{,}1$.

4.49. 1) $5^{\lg 2}$ і $2^{\lg 5}$; 2) $4^{\log_3 7} - 0{,}1$ і $7^{\log_3 4}$.

Обчисліть (**4.50–4.51**):

4.50. 1) $2^{5-8\log_{16} 3}$; 2) $\log_4 3 \cdot \lg 4 \cdot \log_{27} 10$.

4.51. 1) $3^{4-6\log_{27} 2}$; 2) $\log_6 25 \cdot \lg 6 \cdot \log_5 10$.

Знайдіть значення виразу (**4.52–4.53**):

4.52. 1) $\ln\operatorname{tg} 16^\circ + \ln\operatorname{tg} 74^\circ$; 2) $\log_2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} + \log_2\left(2\sin^2\frac{\pi}{12}\right)$.

4.53. 1) $\lg\operatorname{tg} 89^\circ + \lg\operatorname{tg} 1^\circ$; 2) $\log_2\cos\frac{\pi}{8} + \log_2\left(2\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

Обчисліть (**4.54–4.55**):

4.54. 1) $5^{\frac{1}{\log_7 5}}$; 2) $2^{\frac{3}{\log_5 2}}$; 3) $3^{-\frac{1}{\log_7 3}}$; 4) $3^{\frac{1}{2\log_{25} 3}}$.

4.55. 1) $2^{\frac{1}{\log_3 2}}$; 2) $3^{\frac{2}{\log_7 3}}$; 3) $5^{-\frac{1}{\log_4 5}}$; 4) $5^{\frac{1}{3\log_8 5}}$.

4.56. Розв’яжіть рівняння $x^2 + 3^{\log_3 x} = 6$.

4.57. Розв’яжіть рівняння $x^2 - 5^{\log_5 x} - 12 = 0$.

4.58. Обчисліть $\lg^2 2 + \lg 5 \cdot \lg 20$.

Життєва математика

4.59. Відомо, що доросла людина, яка викурює 1 цигарку на день, укорочує свій вік на 10 хв, підліток – на 12 хв. На скільки вкоротить свій вік за місяць підліток, якщо викурюватиме 2 цигарки на день?

4.60. Заробітна плата Олени пропорційна до кількості відпрацьованих годин. За місяць вона відпрацювала 170 годин та отримала 4590 грн. Скільки годин треба відпрацювати Олені в наступний місяць, якщо вона хоче отримати 4860 грн?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 4

1. Знайдіть множину значень функції $y = 3^{-|x|}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +1]$	$(0; 1)$	$(0; 1]$	$(0; +\infty)$	$[1; +\infty)$

2. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $2^x = \frac{1}{16}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-5; -4)$	$[4; +\infty)$	$[-3; 3]$	$[-4; 0]$	$(-\infty; -5]$

3. Скоротіть дріб $\frac{\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha$	$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}\sin 2\alpha$	$\frac{1}{2}\cos 2\alpha$

4. Знайдіть найменший корінь рівняння $x|x| - 3x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
3	0	–3	–1,5	інша відповідь

5. Укажіть, скільки можна скласти різних двоцифрових чисел із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, причому цифри в числі не повторюються.

А	Б	В	Г	Д
24	25	26	28	30

6. Укажіть точку мінімуму функції $y = 3x^2 - x^3$.

А	Б	В	Г	Д
–1	0	1	2	функція не має точки мінімуму

7. Установіть відповідність між функцією $y = f(x)$ (1–4) та її значенням при $x = 2$ (А–Д).

	Функція		*Значення функції*
1	$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$	А	–3
2	$f(x) = x^2 + x - 5$	Б	–1
3	$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$	В	0
4	$f(x) = \frac{3x - 9}{x} \cdot \frac{x}{x^2 - 6x + 9}$	Г	1
		Д	3

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Один з робітників, працюючи самостійно, може виконати деяку роботу за 20 год, а інший – за 30 год. За скільки годин вони виконають роботу, якщо будуть працювати разом?

9. Знайдіть перший член геометричної прогресії b_n, якщо $b_2 = 8$, $b_5 = -64$.

§ 5. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

1. Логарифмічна функція та її графік

Функцію, задану формулою $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), називають *логарифмічною функцією*.

Приклади логарифмічних функцій:

$$y = \log_5 x,\ y = \log_{\frac{1}{2}} x,\ y = \log_{\pi} x,\ y = \log_{\sqrt{7}} x \text{ тощо.}$$

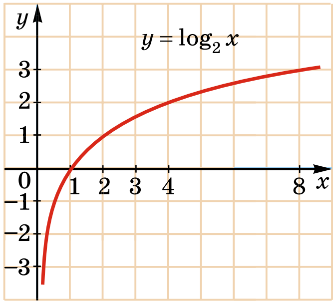
При $a > 0$, $a \neq 1$ вираз $\log_a x$ має зміст лише для додатних значень x. Тому

областю визначення функції $y = \log_a x$ є проміжок $(0; +\infty)$.

Як і для показникової функції, розглянемо приклади логарифмічних функцій і побудуємо графіки цих функцій за точками.

Приклад 1. Розглянемо функцію $y = \log_2 x$. Складемо таблицю значень функції для декількох значень аргументу $x > 0$.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	−3	−2	−1	0	1	2	3



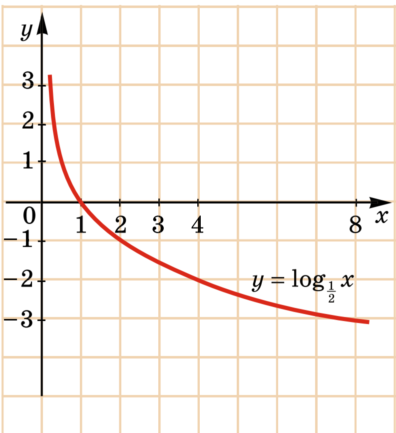
Мал. 5.1

Побудуємо графік функції $y = \log_2 x$ за точками (мал. 5.1). Оскільки $x > 0$, то графік не перетинає вісь ординат, але при $x \to 0$ графік наближається до осі ординат, тобто вісь y – асимптота цього графіка.

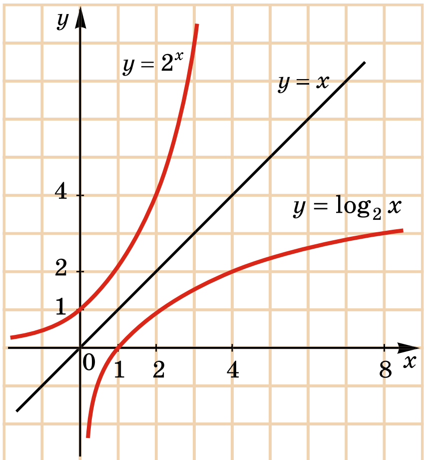
Приклад 2. Розглянемо функцію $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Складемо таблицю значень.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3	2	1	0	−1	−2	−3

Графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ зображено на малюнку 5.2.



Мал. 5.2



Мал. 5.3

Якщо на одному малюнку зобразити графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \log_2 x$ (мал. 5.3), то можна помітити, що вони симетричні відносно прямої $y = x$.

Це можна пояснити тим, що рівності $y = 2^x$ і $x = \log_2 y$ задають одну й ту саму залежність між змінними x і y. Щоб від рівності $x = \log_2 y$ перейти до рівності $y = \log_2 x$, треба поміняти місцями змінні x та y, а на графіку – осі x і y. Цим і пояснюється симетрія графіків функцій $y = 2^x$ та $y = \log_2 x$ відносно прямої $y = x$.

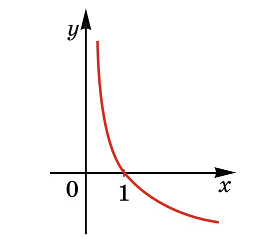
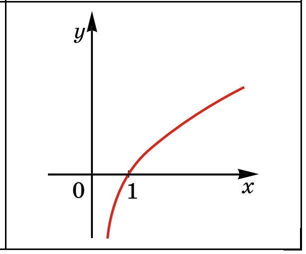
Можна зробити загальний висновок про те, що

графіки показникової функції $y = a^x$ і логарифмічної функції $y = \log_a x$, що мають однакові основи a, симетричні відносно прямої $y = x$.

2. Властивості логарифмічної функції

Використовуючи висновок про симетрію графіків функцій $y = a^x$ та $y = \log_a x$ відносно осі $y = x$ та отримані знання про графіки показникової функції, можна сказати, що графіки всіх функцій виду $y = \log_a x$, де $a > 1$, схематично виглядають так само, як графік функції $y = \log_2 x$ (мал. 5.1), а якщо $0 < a < 1$ – то так само, як графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (мал. 5.2).

Систематизуємо властивості логарифмічної функції $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ та при $a > 1$ у вигляді таблиці.

№	Властивість	$0 < a < 1$	$a > 1$
1	Область визначення	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
2	Множина значень	$y \in R$	$y \in R$
3	Парність, непарність	Ні парна, ні непарна	Ні парна, ні непарна
4	Періодичність	Неперіодична	Неперіодична
5	Нулі функції	$y = 0$ при $x = 1$	$y = 0$ при $x = 1$
6	Проміжки знакосталості	$y > 0$ при $x \in (0; 1)$; $y < 0$ при $x \in (1; +\infty)$	$y > 0$ при $x \in (1; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (0; 1)$
7	Проміжки монотонності	Спадає на $(0; +\infty)$	Зростає на $(0; +\infty)$
8	Екстремуми	Немає	Немає
9	Асимптота	$x = 0$	$x = 0$
10	Графік функції проходить через точку (1; 0)		

Розглянемо приклади використання властивостей логарифмічної функції.

Задача 1. Порівняти значення виразів:

1) $\log_3 2{,}7$ і $\log_3 2{,}9$; 2) $\log_{0,3}\frac{1}{8}$ і $\log_{0,3}\frac{1}{2}$.

Розв'язання. 1) Функція $y = \log_3 x$ зростає на $(0; +\infty)$, тому більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Оскільки $2{,}7 < 2{,}9$, то $\log_3 2{,}7 < \log_3 2{,}9$.
2) Функція $y = \log_{0,3} x$ спадає на $(0; +\infty)$, тому більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Оскільки $\frac{1}{8} < \frac{1}{2}$, то $\log_{0,3}\frac{1}{8} > \log_{0,3}\frac{1}{2}$.

Відповідь. 1) $\log_3 2{,}7 < \log_3 2{,}9$; 2) $\log_{0,3}\frac{1}{8} > \log_{0,3}\frac{1}{2}$.

Задача 2. Порівняти a ($a > 0$, $a \neq 1$) з одиницею, якщо:

1) $\log_a 5 < \log_a 4{,}5$; 2) $\log_a 3{,}8 > \log_a 3$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\log_a 5 < \log_a 4{,}5$, а $5 > 4{,}5$, то меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Тому функція $y = \log_a x$ – спадає, а отже, $0 < a < 1$.
2) $\log_a 3{,}8 > \log_a 3$ і $3{,}8 > 3$. Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Функція $y = \log_a x$ – зростає, тому $a > 1$.

Відповідь. 1) $0 < a < 1$; 2) $a > 1$.

Задача 3. Знайти область визначення функції:

1) $y = \log_3(2x - x^2)$; 2) $y = \log_x(4 - x)$.

Розв'язання. 1) Область визначення знаходимо з умови $2x - x^2 > 0$. Розв'язавши цю нерівність, отримаємо $x \in (0; 2)$.
2) Область визначення знайдемо із системи:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 4 - x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x < 4; \end{cases} \quad x \in (0; 1) \cup (1; 4).$$

Відповідь. 1) $(0; 2)$; 2) $(0; 1) \cup (1; 4)$.

Аналізуючи графіки логарифмічної функції при $a > 1$ і $0 < a < 1$ та властивості, зібрані в таблиці, можна прийти до висновку, що

$\log_a b > 0$, якщо a і b розташовані по один бік від 1, тобто $a > 1$, $b > 1$ або $0 < a < 1$, $0 < b < 1$;
$\log_a b < 0$, якщо a і b розташовані по різні боки від 1, тобто $0 < a < 1$, $b > 1$ або $a > 1$, $0 < b < 1$.

Використовуючи це правило, можна порівнювати логарифми з нулем та між собою.

Приклад 3. $\log_{\frac{1}{7}} 5 < 0$ (оскільки $5 > 1$, $\frac{1}{7} < 1$);
$\log_2 3 > 0$ (оскільки $3 > 1$, $2 > 1$).

Приклад 4. $\log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_7 1{,}1$ (оскільки $\log_{\frac{1}{3}} 2 < 0$, $\log_7 1{,}1 > 0$).

3. Застосування логарифмічної функції для опису реальних процесів

Логарифмічну функцію широко застосовують для опису реальних процесів. Так, наприклад, логарифмічна функція моделює процеси швидкого зростання або затухання, тривалості хімічної реакції, а також, наприклад, закони зміни роботи газу, зміни сили відчуття від сили збудження (психофізичний закон Вебера), зміни тиску від зміни висоти тощо.

Логарифми використовуються також у банківській справі. Якщо, наприклад, вкладник поклав у банк на депозит певну суму грошей під 12 % річних і хоче дізнатися, через скільки років сума подвоїться, то для розв'язування цієї задачі, використовуючи формулу складних відсотків, матимемо:

$$2A_0 = A_0\left(1 + \frac{12}{100}\right)^n, \text{ тобто } 2 = 1{,}12^n,\ n = \log_{1,12} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}12} \approx 6{,}11.$$

Таким чином, щоб вклад подвоївся, він має перебувати в банку трішки більше 6 років.

Радимо знайти в літературі та Інтернеті інші цікаві застосування логарифмічної функції та підготувати презентацію для виступу перед класом.

• Яку функцію називають логарифмічною? • Якою є область визначення логарифмічної функції? • Як розташовані графіки функцій $y = a^x$ і $y = \log_a x$? • Укажіть властивості логарифмічної функції при $0 < a < 1$ і при $a > 1$. • За допомогою якого правила $\log_a b$ можна порівняти з нулем?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

5.1. (*Усно.*) Які з наведених функцій є зростаючими, а які – спадними на $(0; +\infty)$:

1) $y = \log_{0,7} x$; 2) $y = \log_{8,5} x$; 3) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; 4) $y = \log_{\frac{7}{6}} x$?

5.2. Які з наведених функцій є спадними, а які – зростаючими на $(0; +\infty)$:

1) $y = \log_{6,2} x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$; 3) $y = \log_{0,01} x$; 4) $y = \log_{\frac{13}{6}} x$?

5.3. Порівняйте x і y, якщо:

1) $\log_5 x > \log_5 y$; 2) $\log_{0,17} x > \log_{0,17} y$.

5.4. Порівняйте m і n, якщо:

1) $\log_{0,3} m < \log_{0,3} n$; 2) $\log_7 m < \log_7 n$.

2 Порівняйте числа **(5.5–5.6)**:

5.5. 1) $\log_{0,2} 3$ і $\log_{0,2} 4$; 2) $\log_{15} 17$ і $\log_{15} 18$.

5.6. 1) $\log_3 4$ і $\log_3 5$; 2) $\log_{0,8} 2$ і $\log_{0,8} 3$.

Побудуйте схематично графік функції та вкажіть її властивості **(5.7–5.8)**:

5.7. 1) $y = \log_3 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

5.8. 1) $y = \log_{0,6} x$; 2) $y = \log_{2,7} x$.

Зростаючою чи спадною на $(0; +\infty)$ є функція **(5.9–5.10)**:

5.9. 1) $y = \log_{\mathrm{tg}\,43^\circ} x$; 2) $y = \log_{2\sin\frac{\pi}{3}} x$?

5.10. 1) $y = \log_{\frac{1}{\sin 60^\circ}} x$; 2) $y = \log_{\cos\frac{\pi}{3}} x$?

Знайдіть область визначення функції **(5.11–5.12)**:

5.11. 1) $y = \log_7(2x - 1)$; 2) $y = \log_{0,1}(3x - x^2)$.

5.12. 1) $y = \log_5(2 - 3x)$; 2) $y = \log_{0,2}(x^2 - 5x)$.

Порівняйте з одиницею основу логарифма a $(a > 0)$, якщо **(5.13–5.14)**:

5.13. 1) $\log_a 5 < \log_a 10$; 2) $\log_a 2,3 > \log_a 4$.

5.14. 1) $\log_a 7 > \log_a 8$; 2) $\log_a 15 < \log_a 20$.

5.15. Які з точок належать графіку функції $y = \log_{\frac{1}{4}} x$:

1) $A\left(\frac{1}{4}; 0\right)$; 2) $B\left(\frac{1}{16}; 2\right)$; 3) $C(4; -1)$; 4) $D(16; 2)$?

5.16. Які з точок належать графіку функції $y = \log_3 x$:

1) $A(9; -2)$; 2) $B(1; 0)$; 3) $C\left(\frac{1}{9}; 2\right)$; 4) $D\left(\frac{1}{27}; -3\right)$?

5.17. Побудуйте графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Як змінюється y, якщо x зростає від 1 до 8?

5.18. Побудуйте графік функції $y = \log_3 x$. Як змінюється y, якщо x зростає від 1 до 9?

Порівняйте число з нулем **(5.19–5.20)**:

5.19. 1) $\log_5 7$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 2$; 3) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7}$; 4) $\log_{17} \frac{1}{2}$.

5.20. 1) $\log_7 \frac{1}{2}$; 2) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{9}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 19$; 4) $\log_{19} 18$.

3 Порівняйте з одиницею число a **(5.21–5.22)**:

5.21. 1) $\log_a 7 = 2,19$; 2) $\log_a 0,9 = -2,7$;
3) $\log_a 5 = -3,1$; 4) $\log_a 0,17 = 2,5$.

5.22. 1) $\log_a 5 = -12$; 2) $\log_a 0,8 = 7$;
3) $\log_a 13 = 2,7$; 4) $\log_a 0,19 = -2,7$.

5.23. Побудуйте графік функції $y = \log_2(x - 1)$ та запишіть її властивості.

5.24. Побудуйте графік функції $y = \log_3(x - 2)$ та запишіть її властивості.

5.25. Побудуйте графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$ та запишіть її властивості.

5.26. Побудуйте графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$ та запишіть її властивості.

5.27. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \log_{\frac{1}{4}} x$, якщо $x \in \left[\frac{1}{4}; 16\right]$.

5.28. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, якщо $x \in \left[\frac{1}{9}; 3\right]$.

Порівняйте числа **(5.29–5.30)**:

5.29. 1) $\log_3 4$ і 1; 2) $\log_\pi 3$ і 1;
3) 2 і $\log_3 8,5$; 4) $\log_2 3$ і $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$.

5.30. 1) $\log_8 7$ і 1; 2) $\log_\pi 3,5$ і 1;
3) 2 і $\log_3 10$; 4) $\log_2 5$ і $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}$.

Знайдіть область визначення функції **(5.31–5.32)**:

5.31. $y = \log_{0,1}(3 - x) + \sqrt{x - 2}$.

5.32. $y = \log_5(x - 2) + \sqrt{4 - x}$.

4 Побудуйте графік функції **(5.33–5.34)**

5.33. $y = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$.

5.34. $y = 3 + \log_{\frac{1}{4}}(x + 1)$.

Знайдіть область визначення функції **(5.35–5.36)**:

5.35. 1) $y = \log_{0,2}(1 - \cos x)$; 2) $y = \log_{x-1}(9 - x^2)$.

5.36. 1) $y = \log_5(1 + \sin x)$; 2) $y = \log_{x+1}(4 - x^2)$.

Розв'яжіть графічно рівняння **(5.37–5.38)**:

5.37. 1) $\log_3 x = 1 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x - 5$.

5.38. 1) $\log_4 x = 5 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2x - 2$.

Побудуйте графік функції **(5.39–5.40)**:

5.39. 1) $y = 3^{\log_3(x+1)}$; 2) $y = 5^{\log_5(x^2-4)}$.

5.40. 1) $y = 4^{\log_4(x-1)}$; 2) $y = 7^{\log_7(1-x^2)}$.

Життєва математика

5.41. Літо – спекотна пора року. Лікарі радять під час спеки пити багато води, адже її втрата на 10–12 % стає небезпечною для життя людини. Маса учениці 11 класу 54 кг, а вода становить 65 % маси тіла. Втрата якої кількості води небезпечна для учениці?

5.42. 1) Під час чищення зубів кожен із 5 членів родини Терещенків замість того, щоб набрати воду в індивідуальний стакан, користуються постійним протоком. Це призводить до того, що марно витрачаються приблизно 4 л води за 1 хв. Скільки літрів води може зекономити родина Терещенків за місяць, у якому 30 днів, якщо кожен чистить зуби двічі на день протягом 3 хв щоразу?

2) (*Практична діяльність.*) Дізнайтеся, скільки коштує 1 м^3 води у вашій місцевості. Обчисліть, скільки грошей зекономить ваша родина протягом місяця при ощадливому користуванні водою.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 5

1. Графік якої з функцій паралельний графіку функції $y = 7x - 5$?

А	Б	В	Г	Д
$y = -7x + 5$	$y = \frac{1}{7}x - 5$	$y = -5$	$y = 7x + 2$	$y = -\frac{1}{7}x + 5$

2. Розв'яжіть рівняння $0{,}2^{2x-1} = 0{,}008$.

А	Б	В	Г	Д
0	0,5	1	1,5	2

3. Знайдіть $y'(-2)$, якщо $y(x) = \frac{x-2}{3+x}$.

А	Б	В	Г	Д
−2	−4	−5	5	інша відповідь

4. Спростіть вираз $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\pi + \alpha)$.

А	Б	В	Г	Д
0	$2\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$2\sin\alpha$	інша відповідь

5. a_n – арифметична прогресія, $a_1 = 1$, $a_3 = 9$. Знайдіть a_2.

А	Б	В	Г	Д
5	3	3 або −3	5 або −5	−3

6. У коробці 6 білих кульок і декілька чорних. Скільки чорних кульок у коробці, коли ймовірність того, що вибрана навмання кулька біла, дорівнює $\frac{3}{5}$?

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

7. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та його розв'язком (А–Д).

Рівняння

1 $\operatorname{tg} x = -1$

2 $\operatorname{tg} x = 0$

3 $\operatorname{ctg} x = 1$

4 $\operatorname{ctg} x = 0$

Розв'язок рівняння

А $\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$

Б $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

В $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

Г $\pi k,\ k \in Z$

Д $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть найбільше значення функції $y = \frac{1}{5\sin x + 7}$.

9. Обчисліть $\sqrt[3]{5 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{49 - 20\sqrt{6}}$.

§ 6. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

Рівняння називають *логарифмічним*, якщо його змінні входять лише під знаки логарифмів.

Приклади логарифмічних рівнянь:

$\log_5 x = -1$, $\log_2 x + \log_4 x = 7$, $\lg(3 - x) = \lg(2 + x^2)$ тощо.

Розглянемо деякі види логарифмічних рівнянь і методи їх розв'язування.

1. Найпростіші логарифмічні рівняння

Розглянемо найпростіше логарифмічне рівняння $\log_a x = b$.

Функція $y = \log_a x$ зростає або спадає на всій своїй області визначення, а тому кожного свого значення набуває лише при одному значенні аргументу. Оскільки множиною значень функції $y = \log_a x$ є $(-\infty; +\infty)$, то рівняння $\log_a x = b$ має єдиний розв'язок при будь-якому b, який можна знайти, використовуючи означення логарифма: $x = a^b$.

Задача 1. Розв'язати рівняння:

1) $\log_2 x = -3$; 2) $\log_5(x - 1) = 2$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x) = 0$.

Розв'язання. 1) $\log_2 x = -3$; $x = 2^{-3}$; $x = \frac{1}{8}$.

2) $\log_5(x - 1) = 2$; $x - 1 = 5^2$; $x - 1 = 25$; $x = 26$.

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x) = 0$; $x^2 - 2x = \left(\frac{1}{3}\right)^0$; $x^2 - 2x - 1 = 0$; $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Відповідь. 1) $\frac{1}{8}$; 2) 26; 3) $1 \pm \sqrt{2}$.

2. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Область допустимих значень рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ задається системою $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Оскільки функція $y = \log_a x$ — монотонна при $x > 0$ (зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$) і кожного свого значення набуває лише при одному значенні аргументу, то отримаємо, що на області визначення рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Можна зробити висновок, що рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Оскільки в систему входять рівняння $f(x) = g(x)$ і нерівність $f(x) > 0$, то при виконанні цих умов нерівність $g(x) > 0$ виконується автоматично (аналогічно і при виконанні нерівності $g(x) > 0$ нерівність $f(x) > 0$ виконується автоматично).

Отже, остаточно отримаємо:

рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *рівносильне системі*

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \textit{або} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що з нерівностей $f(x) > 0$ або $g(x) > 0$ вибираємо ту, яка є простішою. Якщо обидві нерівності є складними, то алгоритм розв'язування буде такий: записуємо систему, розв'язуємо рівняння $f(x) = g(x)$ та перевіряємо корені.

Задача 2. Розв'язати рівняння $\log_2(x^2 + 2x - 7) = \log_2(x - 1)$.

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 7 = x - 1, \\ x - 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x > 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи рівняння $x^2 + x - 6 = 0$, маємо $x_1 = 2$; $x_2 = -3$. Перший корінь задовольняє умову $x > 1$, а другий — ні. Отже, $x = 2$ — єдиний корінь рівняння.

Відповідь. 2.

3. Рівняння виду $\log_a f(x) = g(x)$

Рівняння виду $\log_a f(x) = g(x)$ рівносильне рівнянню $f(x) = a^{g(x)}$. Зауважимо, що розглядати $f(x) > 0$ (область допустимих значень рівняння) немає потреби, оскільки вираз $a^{g(x)}$ є додатним і $f(x) = a^{g(x)}$, а тому умова $f(x) > 0$ виконується автоматично.

Задача 3. Розв'язати рівняння $\log_3(9^x + 18) = x + 2$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне такому: $9^x + 18 = 3^{x+2}$; $9^x - 3^2 \cdot 3^x + 18 = 0$. Нехай $3^x = t$, $t > 0$. Тоді $t^2 - 9t + 18 = 0$; $t_1 = 3$; $t_2 = 6$. Підставивши отримані розв'язки, маємо: $3^x = 3$ і $x_1 = 1$ або $3^x = 6$ і $x = \log_3 6$; $x = \log_3(3 \cdot 2)$; $x = 1 + \log_3 2$.

Відповідь. 1; $1 + \log_3 2$.

4. Рівняння, які зводяться до простіших за допомогою властивостей логарифмів

Під час розв'язування більш складних логарифмічних рівнянь можна дотримуватися нижченаведеного алгоритму розв'язування:

1) *Знаходимо область допустимих значень рівняння.*
2) *За допомогою властивостей логарифмів зводимо рівняння до одного з раніше розглянутих типів.*
3) *Розв'язуємо отримане рівняння, перевіряємо належність коренів області допустимих значень.*
4) *Даємо відповідь.*

Розглянемо приклади.

Задача 4. Розв'язати рівняння $\log_5(x-3)+\log_5(x+1)=1$.

Розв'язання. 1) Область допустимих значень знайдемо із системи: $\begin{cases} x-3>0, \\ x+1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>3, \\ x>-1; \end{cases}$ $x>3$.

2) Використовуючи формулу $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ справа наліво на області допустимих значень, маємо

$$\log_5(x-3)(x+1)=1.$$

3) Тоді $(x-3)(x+1)=5^1$; $x^2-2x-8=0$; $x_1=-2$; $x_2=4$. Область допустимих значень задовольняє лише другий корінь.

Відповідь. 4.

Задача 5. Розв'язати рівняння $\frac{1}{2}\log_2(x+2)-\log_2(x-1)=1$.

Розв'язання. 1) Область допустимих значень знайдемо із системи: $\begin{cases} x+2>0, \\ x-1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-2, \\ x>1; \end{cases}$ $x>1$.

2) Домножимо ліву і праву частини рівняння на 2, щоб позбутися дробів:

$$\log_2(x+2)-2\log_2(x-1)=2.$$

Використаємо формулу $\log_a x^p=p\log_a x$ справа наліво:

$$\log_2(x+2)-\log_2(x-1)^2=2,$$

а потім – формулу $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ справа наліво:

$$\log_2\frac{x+2}{(x-1)^2}=2.$$

3) Тоді $\frac{x+2}{(x-1)^2}=2^2$; $4x^2-9x+2=0$; $x_1=2$; $x_2=\frac{1}{4}$. Область допустимих значень задовольняє лише перший корінь.

Відповідь. 2.

5. Заміна змінних у логарифмічних рівняннях

Часто логарифмічні рівняння зводяться до алгебраїчних заміною $t=\log_a f(x)$.

Задача 6. Розв'язати рівняння

$$\log_4^2(x-1)+\log_4(x-1)-2=0.$$

Розв'язання. 1) Нехай $\log_4(x-1)=t$, тоді маємо рівняння

$$t^2+t-2=0;\ t_1=1;\ t_2=-2.$$

2) $\log_4(x-1)=1$; $x-1=4^1$; $x_1=5$ або

$\log_4(x-1)=-2$; $x-1=4^{-2}$; $x_2=1\frac{1}{16}$.

Відповідь. 5; $1\frac{1}{16}$.

Задача 7. Розв'язати рівняння $\log_2 x+3\log_x 2=4$.

Розв'язання. 1) Використаємо формулу $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, яка справджується при $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$ на області допустимих значень рівняння $x>0$, $x\neq1$. Маємо

$$\log_2 x+3\cdot\frac{1}{\log_2 x}=4.$$

2) Нехай $\log_2 x=t$, $t+\frac{3}{t}-4=0$; $t_1=1$; $t_2=3$. Тоді $\log_2 x=1$; $x_1=2^1=2$; $\log_2 x=3$; $x_2=2^3=8$.

Відповідь. 2; 8.

• Які рівняння називають логарифмічними? • Як розв'язати рівняння виду $\log_a x=b$? • Як розв'язати рівняння виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$? • Як розв'язати рівняння виду $\log_a f(x)=g(x)$? • Якого алгоритму можна дотримуватися під час розв'язування складних логарифмічних рівнянь? • Яку заміну змінних використовують у логарифмічних рівняннях?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть рівняння (6.1–6.10):

6.1. 1) $\log_2 x=1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x=0$; 3) $\log_5 x=-1$; 4) $\log_7 x=2$.

6.2. 1) $\log_3 x=2$; 2) $\log_7 x=0$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x=1$; 4) $\log_6 x=-1$.

6.3. 1) $\log_2(x-1)=\log_2 17$; 2) $\log_{\frac{1}{8}}(x+3)=\log_{\frac{1}{8}} 5$.

6.4. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=\log_{\frac{1}{3}} 5$; 2) $\log_4(x-3)=\log_4 7$.

6.5. 1) $\log_{\frac{1}{4}}(x+5)=-2$; 2) $\log_2(3x-1)=3$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x)=-1$; 4) $\log_4(x^2+3x+1)=0$.

6.6. 1) $\log_{\frac{1}{5}}(x+2)=-1$; 2) $\log_3(5x+1)=2$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3x)=-2$; 4) $\log_5(x^2-4x+1)=0$.

6.7. 1) $\log_{\frac{1}{7}}(2x-3)=\log_{\frac{1}{7}}(3x-2)$; 2) $\log_5(x+1)=\log_5(3x+4)$;

3) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-1)=\log_{\frac{1}{5}}(3x-3)$; 4) $\log_7(x^2+1)=\log_7(2x+7)$.

6.8. 1) $\log_{\frac{1}{8}}(2x+5)=\log_{\frac{1}{8}}(x+7)$;

2) $\log_{0,8}(x+2)=\log_{0,8}(2x+5)$;

3) $\log_4(x^2-4)=\log_4(5x-10)$;

4) $\log_{19}(x^2+4)=\log_{19}(x+4)$.

6.9. 1) $\log_3^2 x+2\log_3 x-3=0$; 2) $\log_{\frac{1}{7}}^2 x-\log_{\frac{1}{7}} x-2=0$.

6.10. 1) $\log_5^2 x-2\log_5 x+1=0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x-2\log_{\frac{1}{2}} x-3=0$.

6.11. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій

$$y=\log_2(x^2+7x) \text{ і } y=3.$$

6.12. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+8x) \text{ і } y=-2.$$

6.13. Знайдіть точку перетину графіків функцій

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \text{ і } y=\log_{\frac{1}{3}}(2x-1).$$

6.14. Знайдіть точку перетину графіків функцій

$$y=\log_5(x+4) \text{ і } y=\log_5(2x+3).$$

Розв'яжіть рівняння (**6.15–6.26**):

6.15. 1) $\log_3 x^2+\log_3 x^3=10$; 2) $5\log_2\sqrt[5]{x}-\log_2 x^4=9$.

6.16. 1) $\log_2 x^7+\log_2 x=24$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x^4-7\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[7]{x}=12$.

6.17. 1) $\log_{0,25}^2(x^2+1)=1$; 2) $\log_{16}\log_2\log_{\sqrt[8]{3}} x=\frac{1}{2}$.

6.18. 1) $\log_2^2(1+x^2)=9$; 2) $\log_9\log_2\log_{\sqrt{3}} x=\frac{1}{2}$.

6.19. 1) $2\log_8(x+1)=\log_8(4x+1)$;

2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=\log_{\frac{1}{3}}(4x-3)$.

6.20. 1) $2\log_{\frac{1}{7}}(x-1)=\log_{\frac{1}{7}}(2x-3)$;

2) $\frac{1}{2}\log_7(x+1)=\log_7(8x+1)$.

6.21. 1) $\log_2(3\cdot 2^x-4)=x$; 2) $\log_7(7^{x-1}-42)=x-2$.

6.22. 1) $\log_3(4\cdot 3^x-27)=x$; 2) $\log_5(5^{x+2}-20)=x+1$.

6.23. 1) $\log_3(x+1)+\log_3(2x-1)=2$;

2) $\log_7(2x-1)=2\log_7 3-\log_7(x-4)$;

3) $\log_3(3-x)-1=2\log_3 2-\log_3(4-x)$;

4) $\log_2(2x-1)+\log_2(x+1)=\log_2(x+2)+2$.

6.24. 1) $\log_5(x-4)+\log_5(10-x)=1$;

2) $\log_2(x+2)+\log_2(x+3)=\log_2 3+1$;

3) $\lg(x-1)-2=\lg(2x-11)-\lg 50$;

4) $\log_3(x+3)+1=\log_3(3x-1)+\log_3(x+1)$.

6.25. 1) $\log_7^2(x+1)-2\log_7(x+1)-3=0$;

2) $\log_2^2 x-\log_2 x^2-8=0$;

3) $\log_3^2(x+1)-12\log_3\sqrt[4]{x+1}=0$;

4) $\frac{4}{\log_2 x+1}-\frac{2}{3-\log_2 x}=1$.

6.26. 1) $\log_5^2(x-2)+3\log_5(x-2)-4=0$;

2) $\log_4^2 x-\log_4 x^3=0$;

3) $\log_4^2(x-1)-6\log_4\sqrt[3]{x-1}+1=0$;

4) $\frac{2}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_3 x-2}=1$.

6.27. Знайдіть цілі корені рівняння $\frac{2}{\log_7 x-1}-\frac{1}{\log_7 x-3}=3$.

6.28. Знайдіть корені рівняння $\log_{\frac{1}{3}} x+2\log_x\frac{1}{3}=3$.

6.29. Знайдіть корені рівняння $\log_5 x-3\log_x 5=2$.

Розв'яжіть рівняння (**6.30–6.37**):

6.30. 1) $\log_3(6+3^x)=3-x$; 2) $\log_{-2x}(2x^2-x-1)=1$.

6.31. 1) $\log_2(4+2^x)=5-x$; 2) $\log_{2x}(x^2+x-2)=1$.

6.32. $\log_3(16^x-3)+\log_3(16^x-1)=1$.

6.33. $\log_2(9^x - 1) + \log_2(9^x - 2) = 1$.

6.34. $\frac{1}{2}\log_7(3x - 6) + \log_7 2 = \log_7(x - 2)$.

6.35. $\frac{1}{2}\log_3(3x + 1) - \log_3 2 = \log_3(x - 3)$.

6.36. 1) $\log_2(2x)\cdot\log_2\left(\frac{1}{2}x\right) = 3$; 2) $5 - \log_7 x = 4\sqrt{\log_7 x}$.

6.37. 1) $\log_3(9x)\cdot\log_3\left(\frac{1}{9}x\right) = 5$; 2) $4 - \log_2 x = 3\sqrt{\log_2 x}$.

6.38. Скільки коренів має рівняння $\frac{\log_3(2x^2 - x)}{\log_7(2x - 1)} = 0$?

6.39. Скільки коренів має рівняння $\frac{\log_5(2x^2 + x)}{\log_2(3 - 4x)} = 0$?

Розв'яжіть рівняння (**6.40–6.42**):

6.40. 1) $\sqrt{x+2}\cdot\log_5(x-1) = 0$; 2) $\sqrt{x-3}\cdot\log_2(x+1) = 0$.

6.41. 1) $\sqrt{x+2}\cdot\log_7(x+1) = 0$; 2) $\sqrt{1-x}\cdot\log_5(x-2) = 0$.

6.42. 1) $|x|\cdot\log_2 x = 4x$; 2) $|x|\cdot\log_{\frac{1}{3}}(-x) = 2x$.

Життєва математика

6.43. Прожитковий мінімум в Україні на грудень 2018 року становить 1921 грн на працездатну особу, 1626 грн на дітей віком до 6 років і 2027 грн на дітей віком від 6 до 18 років. Родина складається з 5 осіб: тато, мама, Катруся (4 роки) та школярі Марічка (13 років) та Сашко (8 років). Яким має бути дохід родини за грудень 2018 року, щоб він дорівнював:
1) прожитковому мінімуму;
2) 1,5 прожиткового мінімуму;
3) 2 прожитковим мінімумам?

6.44. Гумові покришки коліс автомобіля стираються, і щорічно кожен автомобіль розсіює в повітря 10 кілограмів гумового пилу. Скільки такого пилу здатні виробити за рік усі автомобілі невеличкого містечка, у якому проживають 6000 родин, 20 % яких мають по одному автомобілю, а 5 % – по два автомобілі?